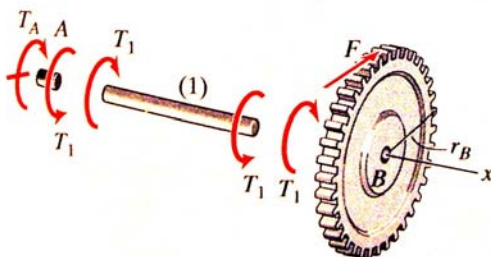
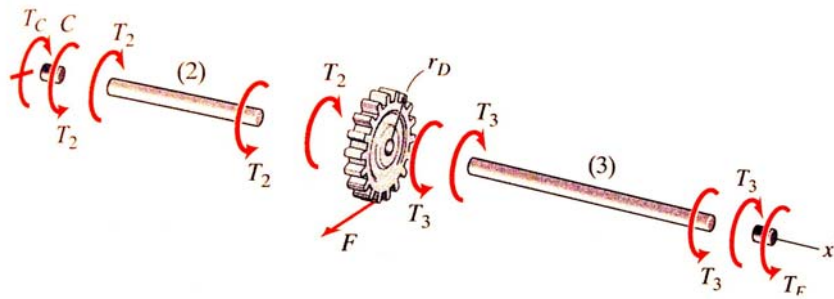


# REZISTENȚA



# MATERIALELOR



© Copyright 2006

Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate autorilor. Reproducerea integrală sau parțială a textului sau figurilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al autorilor.

**Descriere CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**SOFONEA, Galaftion**

**Rezistența materialelor / Galaftion Sofonea, Adrian Marius Pascu. – Sibiu:**  
Editura Universității „Lucian Blaga” din Sibiu, 2007

Bibliografie

ISBN (13) 978-973-739-362-3

I. Pascu, Adrian Marius

539.4(075.8)

Tehnoredactare:

Adrian Marius PASCU

# CUPRINS

	pag
1. PROBLEME ALE REZISTENȚEI MATERIALELOR	5
1.1. Obiectul și problemele rezistenței materialelor	5
1.2. Terminologie	7
1.3. Clasificarea corpurilor în rezistența materialelor	7
1.4. Ipoteze de bază ale rezistenței materialelor	9
1.5. Siguranța în funcționare. Coeficienți de siguranță. Rezistențe admisibile	11
1.5.1. Condiții de rezistență	12
1.5.2. Condiții de rigiditate	13
1.5.3. Condiții de stabilitate	14
1.6. Întrebări - test	14
2. FORȚE EXTERIOARE ȘI FORȚE INTERIOARE	17
2.1. Forțe exterioare. Clasificare	17
2.2. Reacțiuni	19
2.3. Forțe interioare	20
2.4. Funcții de eforturi	24
2.5. Relații diferențiale între sarcini și eforturi	26
2.6. Reguli practice pentru trasarea diagramelor de eforturi	29
2.7. Diagrame de eforturi	31
2.7.1. Bare drepte solicitate de forțe axiale	31
2.7.2. Bară (grindă) dreaptă solicitată la încovoiere	33
2.7.2.1. Bară (grindă) în consolă	33
2.7.2.2. Bară (grindă) simplu rezemată	35
2.7.3. Diagrame de eforturi la arbori	41
2.7.4. Diagrame de eforturi la bare curbe	42
2.7.5. Diagrame de eforturi la bare drepte	43
2.8. Întrebări - test	50
2.9. Probleme propuse	52
3. COMPORTAREA MECANICĂ A ELEMENTELOR DE REZISTENȚĂ	55
3.1. Tensiuni	55
3.2. Tensiuni pe un element de volum	56
3.3. Starea plană de tensiune	58
3.4. Deformații și deplasări	58
3.5. Măsurarea deformațiilor	60
3.6. Aspectul fizic	61
3.7. Încercarea la tracțiune	62
3.7.1. Epruveta	62
3.7.2. Mașina de încercări mecanice și aparate de măsură	63
3.7.3. Diagrama încercării la tracțiune	64
3.8. Caracteristicile elastice și mecanice ale materialelor	64

3.9. Diferite forme de curbe caracteristice	68
3.9.1. Curba caracteristică convențională	68
3.9.2. Curba caracteristică a oțelului la compresiune	68
3.9.3. Curba caracteristică a oțelului la răsucire	69
3.9.4. Curbe caracteristice la materiale care nu ascultă de legea lui Hooke	70
3.10. Expresii analitice pentru curba caracteristică idealizată	70
3.11. Legea generalizată a lui Hooke	71
3.12. Întrebări - test	75
3.13. Probleme propuse	76
4. MĂRIMI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR	81
4.1. Noțiuni generale	81
4.2. Aria secțiunii	81
4.3. Momente statice	81
4.4. Momente de inerție	83
4.4.1. Relații de definiție	83
4.4.2. Variația momentelor de inerție față de axe paralele	84
4.5. Aplicații	86
4.5.1. Momentele de inerție centrale ale unui dreptunghi	86
4.5.2. Momentele de inerție centrale ale secțiunii circulare	86
4.5.3. Secțiunea inelară sau coroana circulară	87
4.5.4. Secțiunea compusă din două dreptunghiuri având axa Oy axă de simetrie	88
4.6. Raze de inerție	88
4.7. Module de rezistență	89
4.8. Întrebări - test	91
4.9. Probleme propuse	92
5. SOLICITĂRI AXIALE	95
5.1. Tensiuni și deformații	95
5.2. Calculul de rezistență la întindere - compresiune	97
5.3. Bare cu variație de secțiune. Secțiune periculoasă	99
5.4. Calculul barelor verticale luând în considerare greutatea proprie	102
5.5. Presiune de contact	104
5.5.1. Suprafața plană în contact	104
5.5.2. Suprafețe cilindrice în contact	106
5.5.3. Suprafețe mici în contact	107
5.6. Sisteme de bară static nedeterminate	109
5.6.1. Noțiuni generale	109
5.6.2. Bare având deformațiile împiedicate de legături	110
5.6.3. Bare cu eforturi inițiale	112
5.6.4. Bare cu secțiuni neomogene	113
5.6.5. Eforturi datorită dilatărilor împiedicate	114
5.7. Întrebări - test	117
5.8. Probleme propuse	118

6. RĂSUCIREA BARELOR DREPTE	123
6.1. Generalități	123
6.2. Tensiuni și deformații la răsucirea barelor drepte de secțiune circulară și inelară	123
6.3. Calculul de rezistență al barelor de secțiune circulară	127
6.4. Energia de deformație la răsucirea barelor de secțiune circulară și inelară	130
6.5. Calculul arcurilor elicoidale cu pas mic	132
6.6. Răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară	134
6.7. Răsucirea barelor cu pereți subțiri, deschise	137
6.8. Răsucirea barelor cu pereți subțiri, închise	139
6.9. Generalizarea relațiilor de calcul la răsucire	143
6.10. Întrebări - test	144
6.11. Probleme propuse	145
7. ÎNCOVOIEREA BARELOR DREPTE ȘI CURBE	149
7.1. Introducere	149
7.2. Tensiuni și deformații în bare drepte solicitate la încovoiere pură	150
7.3. Calculul de rezistență la încovoiere	153
7.4. Forme raționale de secțiuni pentru încovoiere	154
7.5. Tensiuni tangențiale în secțiunile barelor (grinzilor) solicitate la încovoiere simplă	158
7.6. Variația tensiunilor tangențiale la diferite secțiuni	160
7.7. Lunecarea longitudinală și împiedicarea ei	163
7.8. Forfecarea în piesele cu secțiunea mică	165
7.9. Calculul de rezistență al îmbinărilor	167
7.10. Bare de egală rezistență solicitate la încovoiere simplă	170
7.10.1. Bare de secțiune circulară	171
7.10.2. Bare de secțiune dreptunghiulară	172
7.11. Întrebări - test	174
7.12. Probleme propuse	175
8. SOLICITĂRI COMPUSE	181
8.1. Noțiuni introductive	181
8.2. Starea limită	181
8.3. Tensiunea echivalentă	182
8.4. Teoriile clasice de rezistență	184
8.4.1. Teoria tensiunii normale maxime	184
8.4.2. Teoria alungirii specifice maxime	185
8.4.3. Teoria tensiunii, tangențiale maxime	186
8.4.4. Teoria energiei totale de deformație	188
8.4.5. Teoria energiei specifice de variație a formei	188
8.5. Particularități ale teoriilor de rezistență	189
8.5.1. Starea plană de tensiune	189
8.5.2. Aplicarea teoriilor de rezistență la bare	190
8.5.3. Aplicarea teoriilor de rezistență la starea de forfecare pură	191
8.6. Criterii de alegere a teoriilor de rezistență	192

8.7. Calculul de rezistență al barelor supuse la solicitări compuse	193
8.7.1. Întindere sau compresiune excentrică	194
8.7.2. Calculul de rezistență al arborilor de secțiune circulară și inelară solicitați la încovoiere și răsucire	196
8.7.3. Calculul de rezistență al barelor de secțiune oarecare supuse unor solicitări compuse	199
8.8. Întrebări – test	204
8.9. Probleme propuse	205
ANEXE	207
Anexa 1. Rezistențe admisibile	207
Anexa 1,a. Rezistențe de calcul la stare limită	209
Anexa 2. Valorile constantelor E, G, $\nu$ și $\alpha$	211
Anexa 3. Coeficienții de siguranță	212
Anexa 4. Mărimi geometrice ale secțiunilor	213
Anexa 5. Presiunea maximă de contact	219
Anexa 6. Elemente geometrice la răsucire	221
Anexa 7. Oțel cornier cu aripi egale	223
Anexa 8. Oțel cornier cu aripi neegale	224
Anexa 9. Oțel I	225
Anexa 10. Oțel U	226
Anexa 11. Oțel T	227
Anexa 12. Oțel Z	228
SOLUȚII LA PROBLEMELE PROPUSE	229
BIBLIOGRAFIE	245

# 1. PROBLEMELE REZISTENȚEI MATERIALELOR

## 1.1. Obiectul și problemele rezistenței materialelor

Rezistența materialelor este o **disciplină de cultură tehnică generală**, situată între științele fizico-matematice și disciplinele de specialitate ale inginerului. Ea este o continuare logică a mecanicii teoretice, o dezvoltare a acesteia prin introducerea în calcule a **caracteristicilor mecanice și elastice ale materialelor**.

**Rezistența materialelor are ca obiect stabilirea metodelor și procedeele de calcul ale eforturilor, tensiunilor și deformațiilor ce apar în diferite puncte ale elementelor de rezistență, când asupra acestora acționează forțe, precum și stabilirea și utilizarea relațiilor dintre eforturi și dimensiunile secțiunii.**

Rezolvarea problemelor în cadrul rezistenței materialelor are în vedere următoarele trei aspecte :

- I. **aspectul static**, prin care se stabilesc, pe baza legilor mecanicii, relații între forțele exterioare și eforturi (forțe interioare) și respectiv relații între eforturi și tensiuni;
- II. **aspectul geometric**, prin care se analizează deformațiile corpului sub acțiunea sarcinilor;
- III. **aspectul fizic**, prin care se determină pe cale experimentală relațiile de legătură (legile) dintre forțe și deformații, precum și caracteristicile mecanico-elastice ale materialului respectiv.

Rezistența materialelor rezolvă următoarele **trei categorii** de probleme:

- a) **probleme de verificare**, prin care se determină dacă un element de rezistență cu anumite dimensiuni îndeplinește sau nu, sub acțiunea forțelor, condițiile de rezistență, rigiditate și stabilitate;
- b) **probleme de calcul a sarcinii capabile**, prin care, cunoscându-se materialul și caracteristicile sale mecanice și elastice, dimensiunile și modul de solicitare ale elementului de rezistență, se determină valoarea sarcinilor pe care le poate suporta;
- c) **probleme de dimensionare**, prin care se stabilesc dimensiunile optime ale pieselor proiectate.

Fiecare din aceste probleme se rezolvă printr-un **calcul de rezistență**. La baza calculului de rezistență stau **două criterii**:

**I. de bună funcționare**, ceea ce presupune asigurarea la piesa proiectată a:

- a) - rezistenței;
- b) - rigidității;
- c) - stabilității.

**II. de eficiență**, care urmărește ca piesa proiectată să reprezinte soluția cea mai economică posibilă în privința consumului de material și de manoperă.

Din aceste două criterii se observă întrepătrunderea tehnicului (primul criteriu) cu economicul (al doilea criteriu). Pentru ca un calcul de rezistență să poată fi considerat corespunzător trebuie ca acesta să îndeplinească simultan cele două criterii.

Primul criteriu presupune:

- a) Fiecare element de rezistență al unui ansamblu **trebuie să reziste** tuturor solicitărilor ce apar în acesta pe toată durata de exploatare și de aceea **condiția de rezistență se impune prima**. În acest scop în Rezistența materialelor se învață cum **să se aleagă materialul corespunzător, forma secțiunii cea mai avantajoasă și se stabilesc relații între secțiunea transversală și solicitări**, în așa fel ca la solicitările maxime, eforturile care apar în secțiunea respectivului element de rezistență să fie inferioară celei ce produce ruperea.
- b) **Condiția de rigiditate** impune **valori limită pe care să le atingă deformațiile** elementelor de rezistență ale unui ansamblu în timpul solicitării maxime, în exploatare. De aceea Rezistența materialelor stabilește relații între secțiunea transversală a corpului și deformațiile ce apar datorită acțiunii forțelor și ele servesc la calculul de rezistență (verificare, calculul capacității de încărcare și dimensionare). Capacitatea corpurilor de a avea deformații mici sub acțiunea forțelor se numește **rigiditate**.
- c) **Condiția de stabilitate** impune menținerea formei inițiale de echilibru stabil al elementului de rezistență, sub acțiunea forțelor. De multe ori în practică apar cazuri când dimensiunile elementului de rezistență satisfac condițiile de rezistență și rigiditate impuse pentru solicitarea maximă, însă la forțe inferioare își pierd stabilitatea formei inițiale de echilibru. Fenomenul se manifestă prin apariția bruscă a unei deformații foarte mari care poate duce, adesea, la ruperea respectivului element de rezistență și distrugerea întregii construcții.

Exemplul clasic de pierderea stabilității formei de echilibru este cazul unei bare drepte lungi și subțiri (zvelte) comprimate. Pentru forțe mici bara își păstrează forma rectilinie. Dacă se mărește forța, la o anumită valoare a acesteia, bara se încovoiește brusc, putând să se rupă. Fenomenul este cunoscut sub numele de **flambaj la compresiune** sau **pierderea stabilității**, iar forța la care a avut loc fenomenul se numește **forță critică de flambaj**.



## 1.2. Terminologie

Rezistența materialelor utilizează noțiuni specifice ale altor discipline cum ar fi matematica, fizica, mecanica, tehnologia materialelor etc, dar și simboluri și noțiuni proprii. În țara noastră sunt o serie de standarde care definesc noțiunile rezistenței materialelor dintre care menționăm:

- STAS 1963/83 - Rezistența materialelor. Terminologie și simboluri;
- STAS 8147/86 - Tensometrie. Terminologie;
- SR EN 1002-1/1994 - Materiale metalice. Încercarea la tracțiune. Partea 1;
- SR EN 1002-2/1994 - Materiale metalice. Încercarea la tracțiune. Partea 2;
- STAS 10108/78 - Calculul elementelor din oțel.

S-au amintit doar câteva din standarde pentru a sublinia că terminologia, simbolurile și noțiunile utilizate în Rezistența materialelor sunt reglementate și utilizarea acestora este obligatorie. Terminologia specifică se va introduce progresiv, pe parcursul cursului și se va repeta, ceea ce va ușura asimilarea ei.

## 1.3. Clasificarea corpurilor în rezistența materialelor

Din totalitatea caracteristicilor elementelor de rezistență, în Rezistența materialelor, se rețin numai acele caracteristici necesare calculului de rezistență făcând abstracție de celelalte. În acest scop corpurile se schematizează în **modele matematice** ce au **anumite caracteristici mecanice și elastice**. Ca urmare, corpurile se vor încadra în următoarele cinci modele: **fir**, **bară**, **membrană**, **placă** și **bloc**. Prin aceste modele Rezistența materialelor schematizează, printr-o **metodă de calcul**, numeroase organe de mașini și elemente de construcții și deci, calculul de rezistență are o largă generalizare.

În raport cu geometria lor, corpurile se împart în trei grupe:

a) **Corpurile cu fibră medie**, cele ce au una din dimensiuni, lungimea, mult mai mare decât celelalte două, lățimea și grosimea. Ele se definesc prin:

- **axa longitudinală** - ce poate fi dreaptă, curbă, linie frântă, etc.
- **secțiunea transversală** - ce poate fi constantă sau variabilă în lungul axei longitudinale.

Din această grupă fac parte:

- **firele**- care pot fi solificate numai la întindere și nu opun practic nici o rezistență solicitărilor transversale sau de compresiune;
- **barele** - care rezistă atât la solicitări axiale cât și transversale.

După destinație și modul de solicitare barele poartă diferite denumiri specifice: **tiranți** - când sunt solicitate la întindere, **stâlpi** - când sunt solicitate la compresiune, **grinzi** - când sunt solicitate la încovoiere, **arbori** - când sunt solicitate, în special, la torsiune.

Prin **fibră medie** sau **axă** se înțelege locul geometric al centrelor de greutate al secțiunilor plane normale, pe axa barei (sau a firului), iar prin **secțiune normală**, secțiunea plană perpendiculară pe axă.

**b) Corpurile cu suprafață mediană** au una din dimensiuni - grosimea - relativ mică în raport cu celelalte două - lățimea și lungimea -. Din această grupă fac parte membranele și plăcile.

- **Membranele**, ce au grosimea foarte mică, nu rezistă la sarcini transversale sau de compresiune ci numai la sarcini de întindere.
- **Plăcile**, plane sau curbe, pot prelua și sarcini transversale și de compresiune.

Exemple de plăci: capace și pereți de rezervoare, cupole, planșee, etc. iar de membrane: pânza de cort, membrane amortizoare etc.

**c) Blocuri** sau **corpuri masive**, care au dimensiunile de același ordin de mărime. Exemple : bilele și rolele de rulment, blocurile de fundații, etc.

Calculul de rezistență diferă de la o grupă la alta, ele fiind cele mai simple la fire și la bare drepte, cresc în complexitate la barele curbe și cadre, devenind deosebit de complicate la plăci și blocuri.

Rezistența materialelor prezintă modul de determinare a eforturilor, tensiunilor și deformațiilor în cele mai simple și des utilizate corpuri și din acest motiv studiul barei drepte, de secțiune constantă sau variabilă, formează baza și este tratată în cea mai mare parte din curs.

Modelul unei bare drepte (fig. 1.1,a) se schematizează ca în fig. 1.1,b. Astfel, modelul barei conține **axa barei**, de lungime **L** trasată **cu linie groasă** în figură și **secțiunea transversală**, dreptunghiulară în acest caz, de lățime **b** și înălțime **h**. **Sistemul de axe atașat modelului**, este un **sistem triortogonal drept** cu axa **Ox** -axa barei și sistemul **yOz**, axele centrale principale ale secțiunii.

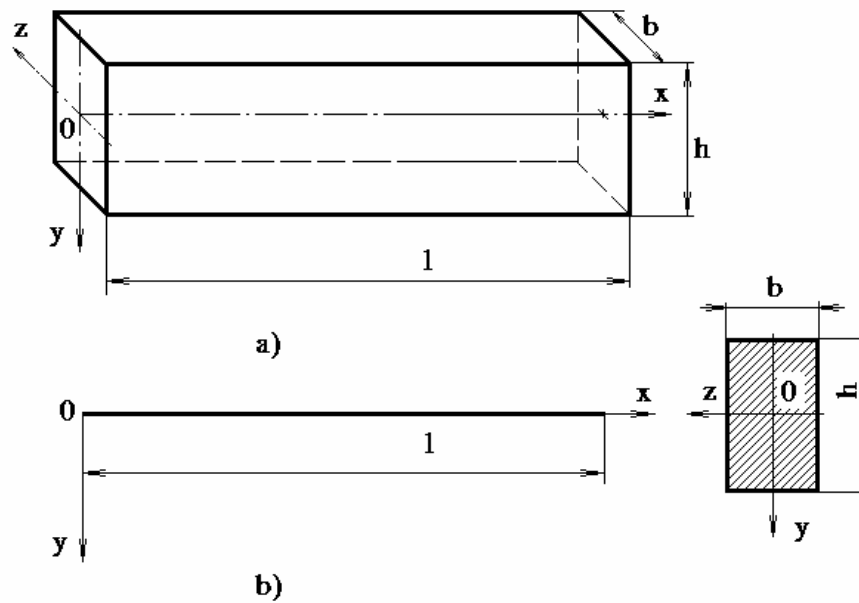


Fig. 1.1

În general toate aceste modele se pot numi **elemente de rezistență**. În cele ce urmează, pentru noțiunea generală de element de rezistență se va folosi simbolul ER pentru forma singular și (ER) pentru forma plural.

Un element de rezistență poate fi confecționat din diferite materiale și cu diferite dimensiuni. Comportarea (ER) la acțiunea sarcinilor depinde atât de dimensiunile și forma secțiunii transversale, cât și de anumite caracteristici mecanice și elastice ale materialului.

Rezolvarea problemelor de rezistență implică utilizarea atât a dimensiunilor geometrice cât și modul de încărcare, caracteristicile elastice și mecanice ale materialului fiecărui ER.

## 1.4. Ipoteze de bază ale rezistenței materialelor

Pentru a putea stabili relațiile de calcul simple, în Rezistența materialelor se folosesc anumite ipoteze referitoare atât la structura materialelor cât și la comportarea lor sub acțiunea sarcinilor aplicate. Aceste ipoteze sunt uneori în concordanță cu realitatea, iar alteori ele reprezintă simplificări ale fenomenelor reale, care duc la rezultate verificate experimental și deci acceptabile pentru scopul rezistenței materialelor.

Ipotezele de mai jos sunt de bază și în afară de acestea s-au făcut sau se vor mai face și alte ipoteze specifice în anumite capitole. Ca primă ipoteză expusă a fost schematizarea corpurilor în fire, bare, membrane, plăci și blocuri.

Ipotezele de bază ale rezistenței materialelor sunt:

**I. Ipoteza mediului continuu**, prin care se admite că **materialul ER se consideră un mediu continuu ce ocupă întregul spațiu delimitat de volumul său**. Această ipoteză corespunde satisfăcător materialelor amorfe dar nu corespunde realității la cele cristaline. Ipoteza este necesară întrucât mărimile din rezistența materialelor, cum sunt tensiunile, deplasările, deformațiile, etc. pot fi scrise ca funcții continue de punct și nu ca funcții discrete specifice pentru fiecare cristal sau particulă, permițând folosirea calculului și metodelor analizei matematice.

**II. Ipoteza mediului omogen**, prin care se admite că **materialul ER are în toate punctele din volumul său aceleași mărimi fizice**. Nici această ipoteză nu concordă în totalitate cu realitatea în special în cazul betonului, lemnului și chiar al metalelor. Astfel, la metale prin diverse tratamente termice sau mecanice se creează cruste dure și caracteristici mecanice diferite de ale miezului.

**III. Ipoteza izotropiei**. **Materialele se consideră izotrope când au pe toate direcțiile aceleași caracteristici elastice  $E$ ,  $G$  și  $\nu$** . În caz contrar materialele se consideră **anizotrope**. În rezistența materialelor, toate materialele se consideră izotrope.

**IV. Ipoteza elasticității perfecte**. Dacă tensiunile nu depășesc **anumite valori limită, materialele utilizate de ingineri se consideră perfect elastice**. Cea ce înseamnă că deformațiile produse de sarcini se anulează odată cu anularea sarcinilor.

**V. Ipoteza proporționalității între tensiuni și deformații specifice**. Pentru solicitări în domeniul elastic se consideră că între tensiuni și deformații specifice există o relație liniară, adică este valabilă legea lui Hooke.

**VI. Ipoteza deplasărilor mici**. În afară de unele excepții, în Rezistența materialelor se consideră că **deformațiile ER sunt foarte mici în raport cu dimensiunile acestuia**. Ipoteza este foarte importantă întrucât **ecuațiile de echilibru static se pot scrie raportând forțele la starea inițială nedeformată a ER**. Tot pe baza acestei ipoteze, în calculele analitice, **termenii ce conțin deformații specifice sau deplasări la puteri superioare se pot neglija în raport cu termenii la puterea întâi** (teoria de ordinul întâi).

**VII. Ipoteza proporționalității dintre deformații specifice și deplasări**. În domeniul elastic se consideră că **între deformațiile specifice și deplasări există o relație liniară**. Ipoteza este o consecință a ipotezei deformațiilor mici.

**VIII. Ipoteza secțiunilor plane (Bernoulli)**. **Secțiunile plane și normale pe axa barei rămân plane și normale și după deformarea produsă de sarcini**. Această ipoteză se verifică experimental pe conturul barelor și se admite valabilă și în interiorul acestora.

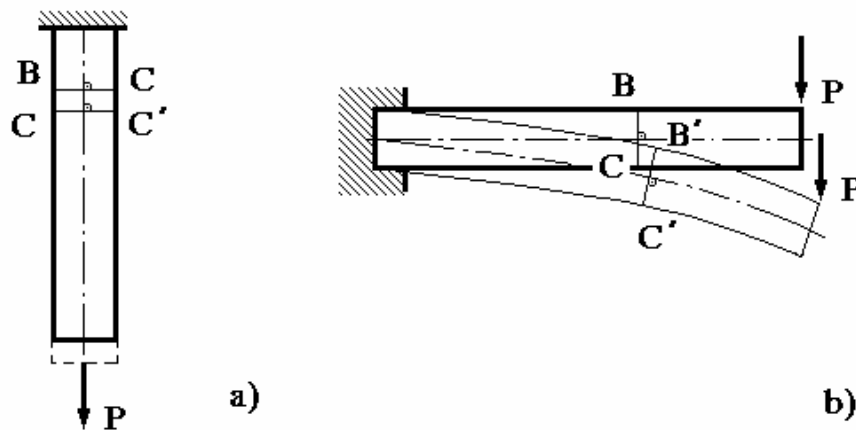


Fig. 1.2

Astfel în cazul barei din figura 1.2-a, supusă la întindere, secțiunea BC se deplasează în B~C~ dar rămâne plană și normală pe axa barei. La fel pentru bara din figura 1.2-b supusă la încovoiere secțiunea AB se deplasează și se rotește în poziția B~C~, dar rămâne plană și normală pe axa barei.

**IX. Principiul lui Saint-Venant.** Dacă se înlocuiesc forțele care acționează pe o porțiune mică a ER cu un alt sistem de forțe echivalent din punct de vedere static cu primul, noua distribuție a forțelor produce în locul de aplicare diferențe apreciabile față de prima dar rămâne fără efect, sau cu efect neglijabil, la distanțe mari de locul de aplicare a forțelor.

**X. Principiul suprapunerii efectelor.** Prin aplicarea unei sarcini asupra unui ER până la limita prescrisă de proporționalitate a materialului, eforturile, tensiunile, deformațiile și deplasările ce se produc în ER depind exclusiv de mărimea acelei sarcini și nu sunt influențate de efectele altor sarcini aplicate anterior sau concomitent. Acest principiu este o consecință a legii lui Hooke (deformațiile sunt proporționale cu sarcinile) și a ipotezei deformațiilor mici ce indică teoria de ordinul întâi.

## 1.5. Siguranța în funcționare. Coeficienți de siguranță. Rezistențe admisibile.

În rezolvarea problemelor de rezistența materialelor, (ER) dimensionate sau verificate li se pot impune anumite condiții, care să le asigure o bună funcționare pe toată durata de utilizare. Aceste condiții sunt :

- a) -condiții de rezistență;
- b) -condiții de rigiditate;
- c) -condiții de stabilitate.

### 1.5.1. Condiții de rezistență

Spunem că un ER este corespunzător, din punct de vedere al condițiilor de rezistență, atunci când tensiunile care se produc în acesta, datorită sarcinilor, nu depășesc anumite limite, stabilite convențional, dar corelate cu caracteristicile mecanice ale materialului din care este confecționat ER.

**Valoarea convențională aleasă în calcul, pe baza practicii, pentru tensiunea maximă care se poate produce într-o piesă, în condiții date de material și de solicitare se numește rezistență admisibilă.**

Ținând seama de deformațiile care se produc, până la rupere, materialele se împart în două grupe:

-**tenace**, care se deformează mult înainte de rupere (ex : oțelurile de rezistență mică și mijlocie);

-**fragile**, care nu se deformează sau se deformează foarte puțin, fără producerea fenomenului de gătuire înainte de rupere (exemplu : fonta, sticla, oțelul de rezistență mare, etc.).

Rezistența admisibilă poate fi definită în comparație cu **o stare limită, periculoasă**, care trebuie evitată.

La materialele tenace, care au limita de curgere  $\sigma_c$ , rezistența admisibilă se definește prin relația:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c} \quad (1.1a)$$

unde:  $c_c$  este **coeficientul de siguranță** față de limita de curgere.

Alegând în calcul un coeficient de siguranță corect, se va evita atingerea limitei de curgere, deci producerea de deformații mari, care pot scoate piesa din funcțiune.

La materialele fragile rezistența admisibilă se definește în funcție de rezistența la rupere :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r} \quad (1.1b)$$

unde:  $c_r$  este **coeficientul de siguranță** față de rezistența la rupere.

Verificările efectuate pe diferite (ER) au arătat care ar trebui să fie valorile cele mai potrivite pentru coeficienții de siguranță și deci și pentru rezistențele admisibile. Spre exemplu, dacă ne referim la oțel rezistența admisibilă trebuie să fie inferioară nu numai limitei de curgere  $c_i$  și limitelor de elasticitate și proporționalitate.

La alegerea coeficientului de siguranță trebuie să ținem seamă de următorii factori:

a) **Natura materialului și tehnologia de fabricație.** Fiecare material are anumite caracteristici mecanice care determină rezistența admisibilă. Coeficientul de siguranță este cu atât mai mare cu cât materialul este mai neomogen. Astfel, pentru fontă coeficientul de siguranță este mai mare decât pentru oțel, la beton, lemn, coeficientul de siguranță este mai mare decât la metale. Structura neuniformă a materialului, existența crustelor de turnare, forjare, laminare sunt factori tehnologici care au efect negativ asupra rezistenței admisibile și deci vom lua în calcul un coeficient de siguranță mai mare.

b) **Felul solicitării.** Prin efectuarea de încercări mecanice (întindere, compresiune, încovoiere, etc.) s-a constatat că materialele au caracteristici mecanice diferite în funcție de modul de solicitare. Unele materiale au totuși rezistențe admisibile egale pentru diferite solicitări de exemplu, oțelul pentru întindere, compresiune, încovoiere.

c) **Modul de acțiune a sarcinilor în timp.** La solicitări ale ER cu sarcini statice coeficientul de siguranță este mai mic decât la sarcini variabile în timp sau la sarcini aplicate cu șoc. S-a constatat experimental că un material cu rezistența de rupere  $\sigma_r$ , supus unor solicitări variabile în timp se rupe la valori  $\sigma_{max}$  inferioare lui  $\sigma_r$ . Acestui fenomen i s-a dat numele de **oboseală a materialului**. Valoarea limită superioară a lui  $\sigma_{max}$  la care materialul rezistă la un număr foarte mare de cicluri (ex.  $5 \cdot 10^7 \dots 10^8$  cicluri) fără a se rupe se numește **rezistență la oboseală**.

d) **Modul de evaluare a sarcinilor și de realizare a ipotezelor de calcul.** Cu cât sarcinile sunt mai incert evaluate, cu cât ipotezele și schemele de calcul au un grad mai mare de aproximare, cu atât rezistențele admisibile trebuie să fie mai mici și coeficienții de siguranță mai mari.

e) **Durata de folosire a piesei.** Pentru piese cu durată scurtă de funcționare, se pot lua coeficienți de siguranță mai mici, deci rezistențe admisibile mai mari.

f) **Temperatura.** Temperaturile înalte sau scăzute influențează negativ rezistențele admisibile. Pentru (ER) importante care vor lucra la temperaturi ridicate sau joase, rezistența admisibilă se alege în funcție de caracteristicile mecanice la temperatura respectivă.

## 1.5.2. Condiții de rigiditate

Funcționarea unor piese este posibilă numai atunci când deformațiile lor nu depășesc anumite limite. Ca exemplu: un arbore ce are deformații mari la încovoiere provoacă o uzură prematură a lagărelor. Din această cauză în calculul de rezistență se impun anumite limite pentru mărimea deformațiilor și se spune că ER trebuie să răspundă unor anumite condiții de rigiditate date.

### 1.5.3. Condiții de stabilitate

La problemele de stabilitate elastică, deși condițiile de rezistență sunt satisfăcute, la anumite valori ale sarcinilor, numite **valori critice**, piesele își pot pierde echilibrul stabil, fapt ce duce la distrugerea lor. Aceste (ER) trebuie să satisfacă **condițiile de stabilitate**, adică sarcinile aplicate să fie inferioare celor critice.

Câteva valori orientative ale rezistențelor admisibile sunt prezentate în *Anexa 1*. Se poate observa că rezistențele admisibile la încovoiere sunt de obicei cu 10-20% superioare celor de tracțiune, pe când cele de la forfecare și răsucire sunt 60-80% din cele de tracțiune. O excepție de la această regulă face fonta, ce are rezistențe admisibile la compresiune de 2...5 ori mai mari decât la tracțiune.

### 1.6. Întrebări – test

1. Ce condiții trebuie să îndeplinească un element de rezistență?
2. Ce se înțelege prin rezistență?
3. Ce este rigiditatea?
4. Care sunt criteriile utilizate pentru clasificarea elementelor de rezistență?
5. Ce sunt barele? Dar firele? Care este deosebirea dintre bară și fir?
6. Ce probleme rezolvă rezistența materialelor?
7. Definiți axa barei? Definiți secțiunea unei bare?
8. Ce sunt plăcile? Dar membranele?
9. Care sunt elementele caracteristice plăcilor?
10. Ce este un corp masiv? Dați exemple de asemenea corpuri.
11. Cum se clasifică sarcinile dinamice?
12. În rezistența materialelor forțele sunt vectori liberi, legați sau alunecători?
13. Ce este o deplasare?
14. Ce deosebire este între deplasare și deformație?
15. Ce ipoteză introduce rezistența materialelor față de mecanica teoretică?
16. Ce este un material izotrop? Dar omogen?
17. Ce este un material anizotrop? Dar neomogen?
18. Care sunt unitățile de măsură pentru următoarele mărimi?
  - a. forță concentrat aplicată;
  - b. sarcină distribuită pe o lungime, respectiv pe o suprafață;
  - c. moment concentrat aplicat;
  - d. moment distribuit;



19. Rezistența admisibilă a unui material este:
- o valoare convențională aleasă a tensiunii maxime produse într-o piesă în funcție de material și solicitare;
  - o mărime ce se determină experimental;
  - o valoare a tensiunii care produce ruperea materialului;
  - o valoare a forței aplicate unui material până la care acesta rezistă;
  - o valoare a tensiunii până la care materialul nu începe să curgă;
  - o valoare a tensiunii până la care un material poate fi solicitat, fără ca în acesta să apară fisuri.
20. Care este obiectul Rezistenței materialelor?
- cunoașterea caracteristicilor mecanice ale unui material;
  - stabilirea unor relații de calcul pentru studiul rezistenței, rigidității și stabilității diverselor structuri;
  - determinarea condițiilor de echilibru;
  - determinarea caracteristicilor mecanice ale materialelor;
  - calculul de proiectare a unei structuri;
  - rezolvarea oricărei probleme de la punctele *b*, *c* și *d*.
21. Ce este un material izotrop?
- un material care are aceleași proprietăți în toate direcțiile;
  - un material care se supune legii lui Hooke;
  - un material care prezintă în tot volumul său aceeași valoare a unei anumite constante fizice;
  - un material care ocupă în mod continuu tot spațiul ocupat de volumul său;
  - un material la care  $E = G$ ;
  - un material care are aceleași proprietăți pe trei direcții perpendiculare între ele.
22. Ce este elasticitatea liniară? Dar neliniară?
23. Care sunt ipotezele de bază în rezistența materialelor?
24. În ce constă principiul suprapunerii efectelor forțelor?
25. Enunțați principiul lui Saint – Venant?
26. Enunțați ipoteza lui Bernoulli.
27. Ce este rezistența admisibilă? Dar coeficientul de siguranță? Ce factori influențează aceste mărimi?



## 2. FORȚE EXTERIOARE ȘI FORȚE INTERIOARE

### 2.1. Forțe exterioare. Clasificare

Construcțiile ingineresti sunt realizate din unul sau mai multe (ER). În *Rezistența materialelor* se analizează fiecare ER sau subansamblu **numai în situația de echilibru sub acțiunea forțelor exterioare**, așa că valoarea torsorului forțelor exterioare, ce acționează asupra unui ER sau subansamblu, este totdeauna egal cu zero.

În cele câte urmează prin **forță** se va înțelege noțiunea de **forță generalizată: forță sau moment**.

În *Rezistența materialelor* noțiunea de **forță exterioară** cuprinde atât **forțele aplicate** pe suprafața ER cât și cele **distribuite pe întreaga masă a materialului** cum sunt: greutatea, forțele de inerție, forțele electromagnetice, datorită dilatării împiedicate, etc., precum și **forțele de legătură dintre (ER)** numite reacțiuni.

Forțele exterioare se pot clasifica astfel:

a) după **natura** lor:

- **sarcini** sau **forțe active**;
- **reacțiuni** sau **forțe de legătură**.

b) după locul de aplicare:

- **de suprafață** sau **de contur**, ce se aplică în exteriorul ER;
- **de volum** sau **masice**, ce sunt distribuite în întregul volum al ER.

c) după mărimea suprafeței pe care se aplică, forțele de suprafață pot fi:

- **concentrate**, ce se consideră aplicate într-un punct și constituie o schematizare a forțelor distribuite pe o suprafață foarte mică, în raport cu suprafața (ER), (fig. 2.1,a);

- **distribuite**, ce se repartizează **uniform** sau cu **intensitate variabilă** pe o suprafață sau în lungul unei linii (fig. 2.1,b).

Forțele concentrate se măsoară în N, kN, MN, etc. iar cele distribuite pe suprafață se măsoară în  $N/m^2$  sau Pa,  $N/mm^2$  sau MPa,  $kN/m^2$ , etc. iar cele distribuite în lungul unei linii în N/m, kN/m, etc.

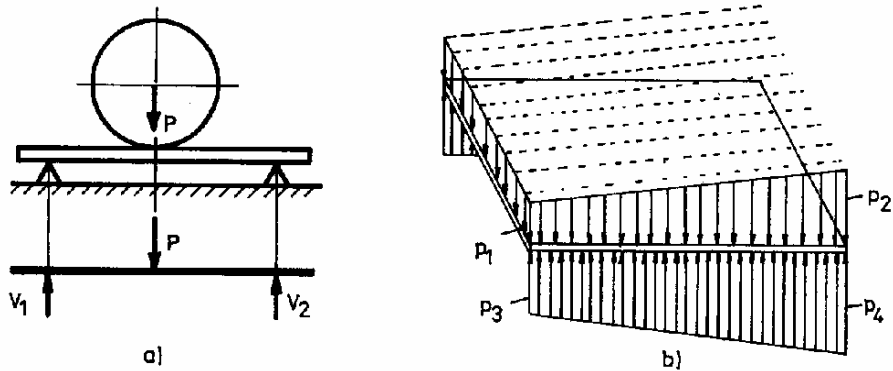


Fig. 2.1

Sarcinile aplicate (ER) pot fi clasificate astfel:

a) După proveniență:

-**sarcini permanente**, ce-și păstrează intensitatea constantă (exemplu: greutatea proprie a ER);

-**sarcini utile** formate din acelea ce rezultă din rolul funcțional al ER (exemple: greutatea autovehiculelor pentru un pod, încărcătura pentru mijloacele de transport, forța de așchiere pentru scule, etc.);

-**sarcini accesorii** ce apar în timpul funcționării (exemple: forțe de inerție, forțe de frecare, dilatare împiedicată, etc.);

-**sarcini accidentale**, ce acționează intermitent și neregulat (exemple: acțiunea vântului, greutatea zăpezii, etc.);

-**sarcini extraordinare**, ce acționează întâmplător dar pot avea efect catastrofal (exemple: incendiile, exploziile, inundațiile, cutremurele de pământ, etc.).

Sarcinile permanente, utile și accesorii se numesc **sarcini fundamentale**.

b) După modul de acțiune în timp se pot clasifica în:

-**sarcini statice**, ce se aplică lent iar apoi își păstrează intensitatea constantă (fig.2.2,a);

-**sarcini dinamice**, ce se aplică cu viteză variabilă relativ mare și care pot fi:

-**sarcini aplicate brusc**, ce produc șoc (fig.2.2,b);

-**sarcini variabile în timp** a căror intensitate variază periodic după o anumită lege, (fig.2.2,c).

c) După poziția sarcinii pe ER

-**sarcină fixă**, ce acționează în același loc pe toată durata funcționării construcției (exemplu: greutatea proprie);

-**sarcină mobilă**, a cărei poziție este variabilă (exemplu: greutatea unui vehicul pe un pod).

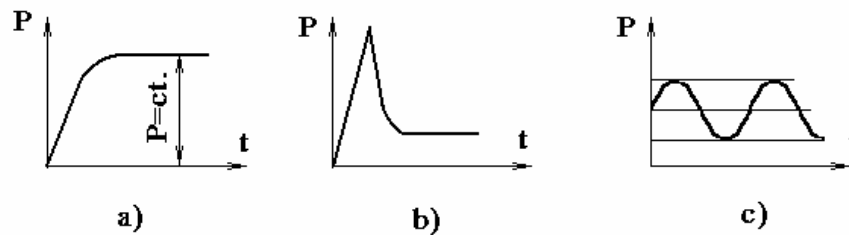


Fig. 2.2

## 2.2. Reacțiuni

**Reacțiunile** sau **forțele de legătură** reprezintă acțiunea mecanică a legăturilor ER cu alte (ER) și iau naștere la acțiunea sarcinilor asupra ER respectiv.

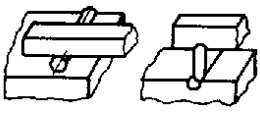
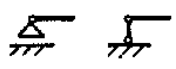
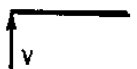


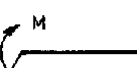

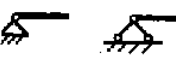
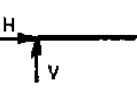
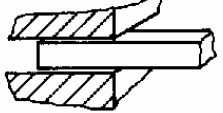
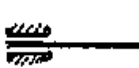
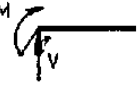

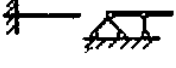
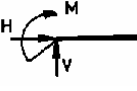


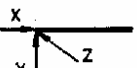


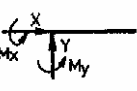
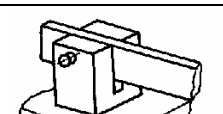

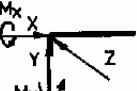
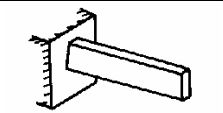

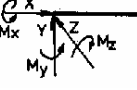
**Legăturile, anulează unul sau mai multe grade de libertate ale ER, restrângându-i posibilitățile de mișcare. Conform axiomei legăturilor, efectul legăturii unui ER, supus acțiunii sarcinilor, poate fi întotdeauna înlocuit prin reacțiuni (forțe de legătură), corespunzătoare, ce se determină din condițiile de echilibru.** Când numărul ecuațiilor de echilibru distincte este egal cu cel al reacțiilor ER constituie un **sistem static determinat**, iar când numărul ecuațiilor de echilibru este mai mic decât numărul reacțiilor, sistemul este **static nedeterminat**. **Gradul de nedeterminare** este dat de diferența dintre numărul reacțiilor și numărul ecuațiilor de echilibru. Ridicarea nedeterminării, se realizează în *Rezistența materialelor*, prin introducerea **condițiilor geometrice de deformare**.

Felul legăturilor care pot apărea la capătul unei bare și modul de înlocuire cu reacțiuni sunt redate în tabelul 2.1.

Evaluarea sarcinilor și determinarea reacțiilor constituie una din problemele importante ale rezistenței materialelor.

Spre deosebire de mecanica teoretică, în *Rezistența materialelor* **forțele sunt vectori legați de punctul de aplicație. Schimbarea punctului de aplicație a forței nu schimbă starea de echilibru dar poate modifica starea de solicitare a ER.**

Tabelul 2.1

Solici-tare	Denumire	Legătura mecanică	Simbol	Reacțiuni
plană	reazem simplu mobil			
	ghidaj dublu			
	articulație cilindrică simplă			
	ghidaj simplu			
	încastrare			
spațiu	articulație sferică			
	articulație cilindrică și ghidaj			
	articulație cilindrică			
	încastrare			

## 2.3. Forțe interioare

**Forțele interioare** sau **eforturile** se produc în interiorul ER când acesta este acționat de forțe exterioare. Pentru determinarea eforturilor, Rezistența materialelor utilizează **metoda secțiunilor**, a lui **Cauchy**. Această metodă este echivalentă cu teorema echilibrului părților: **dacă un ER este în echilibru sub acțiunea unui sistem de**

forțe, atunci și o parte oarecare din acest corp este, de asemenea în echilibru sub acțiunea forțelor corespunzătoare acestei părți.

Această metodă constă în:

- secționarea imaginară a ER, în locul unde urmează să fie determinate forțele interioare (eforturile) aferente;

- reprezentarea, pe porțiunile ER obținute, a forțelor exterioare și a celor interioare aferente;

- scrierea ecuațiilor de echilibru pentru sarcinile exterioare și eforturi, reprezentate pentru una din porțiunile ER secționat.

Se consideră o bară oarecare acționată de un sistem de forțe  $F_1, F_2, \dots, F_n$  (fig. 2.3a), care se secționează cu un **plan imaginari  $Q$ , normal pe axa barei**. Prin secționare se obțin două părți: ① și ②. Cele două părți ale barei se echilibrează prin forțele interioare distribuite  $p$ , ce se produc pe fețele de separație  $A$  (fig.2.3,b). Forțele distribuite pe suprafața  $A$  a părții ②, se reduc în centrul de greutate  $O_2$  la o forță rezultantă  $R_2$  și un moment rezultant  $M_{0_2}$ . Acestea constituie totodată efectul părții ① asupra părții ②. Deci, forțele  $p$  de pe fața  $A$  a părții ② sunt echivalente cu **torsorul de reducere în  $O_2$**  a forțelor ce acționează asupra părții ① (fig.2.3c).

La fel, dacă se reprezintă partea ①; acțiunea părții ② asupra părții ① este echivalentă, în  $O_1$ , cu rezultanta  $R_1$  și momentul rezultant  $M_{0_1}$ .

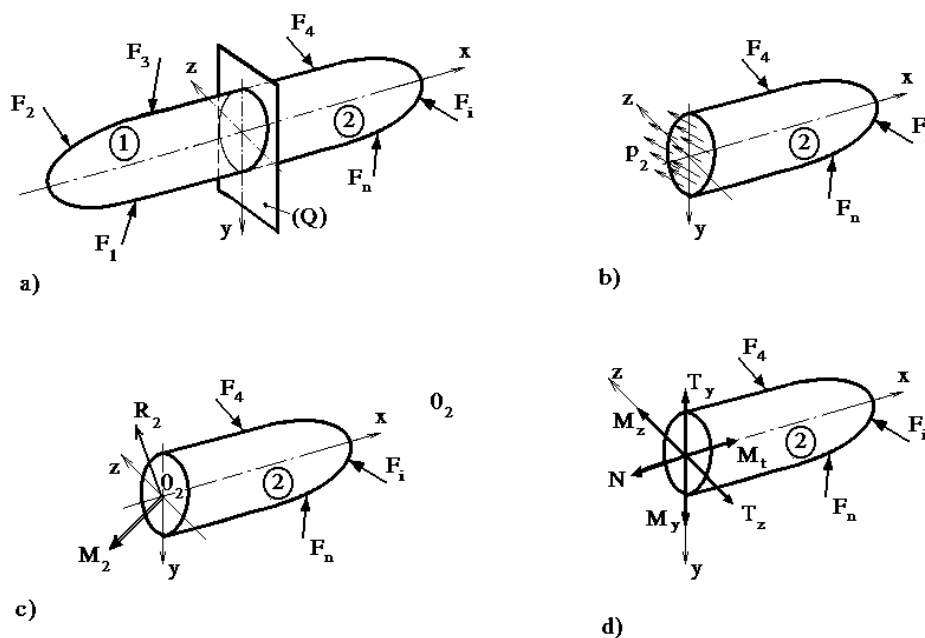


Fig. 2.3

Acțiunea părții ①, asupra părții ② este egală și de sens contrar cu acțiunea părții ② asupra părții ① (conform principiului acțiunii și reacțiunii) și rezultă:

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = \bar{R} \quad \text{și} \quad \bar{M}_{01} = \bar{M}_{02} = \bar{M}_0.$$

Elementele torsorului de reducere în centrul de greutate a secțiunii al forțelor ce acționează asupra părții din stânga sunt egale și de sens contrar cu elementele torsorului de reducere, în același punct, al forțelor ce acționează asupra părții din dreapta.

Elementele  $R_1$ ,  $M_{01}$ , și respectiv  $R_2$ ,  $M_{02}$  ce asigură echilibrul fiecărei părți se numesc **forțe interioare**.

Acestea sunt, totodată, rezultanta și respectiv momentul resultant al forțelor interioare elementare ce se produc între particulele celor două părți la acțiunea sarcinilor. Prin separarea, printr-un plan imaginar, a celor două părți forțele interioare au fost transpuse în categoria forțelor exterioare și luate în considerare ca atare.

Proiectând elementele torsorului de reducere în O, pe axele de coordonate, se obțin șase componente: trei forțe:  $N$ ,  $T_y$ ,  $T_z$  și trei momente:  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  (fig.2.3,d). **Componentele  $N$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  se numesc eforturi secționale sau eforturi din secțiune și le vom numi EFORTURI. Fiecare efort are o denumire, îi corespunde o deplasare (deformație) și produce o solicitare simplă asupra barei.**

**Forța normală sau forța axială  $N$**  (fig. 2.3,d), este egală cu suma algebrică, luată cu semn schimbat, a proiecțiilor pe axa  $x$ , a tuturor forțelor situate în stânga (sau la dreapta, luate cu același semn) secțiunii considerate:

$$N = -\sum_1 F_x = \sum_2 F_x. \quad (2.1)$$

unde 1 înseamnă că se iau forțele de pe partea stângă, iar 2, forțele de partea dreaptă.

Forța normală se consideră **pozitivă** când produce **solicitarea de întindere, care lungeste bara** și **negativă** când produce **solicitarea de compresiune, care scurtează bara**.

**Forța tăietoare  $T_y$** , respectiv  $T_z$ , este egală cu suma proiecțiilor pe axele  $Oy$  și respectiv  $Oz$ , din planul secțiunii, luate cu semn schimbat, a tuturor forțelor situate la stânga (sau la dreapta cu același semn) secțiunii considerate:

$$T_y = -\sum_1 F_y = \sum_2 F_y; \quad T_z = -\sum_1 F_z = \sum_2 F_z. \quad (2.2)$$

Forța tăietoare  $T_y$  este **pozitivă** dacă **deplasează secțiunea în sens contrar axei  $Oy$** , în planul  $xOy$ , iar  $T_z$  în sens contrar axei  $Oz$ . **Forțele tăietoare produc solicitarea de forfecare sau tăiere.**

**Momentul încovoietor  $M_z$** , respectiv  $M_y$ , este egal cu suma momentelor în raport cu axa  $Oz$ , respectiv  $Oy$ , din planul secțiunii, a tuturor cuplurilor de forțe și momentelor forțelor, situate la stânga (sau la dreapta luate cu minus) secțiunii considerate:



$$M_z = \sum_1 M_z = -\sum_2 M_z \quad \text{și} \quad M_y = \sum_1 M_y = -\sum_2 M_y . \quad (2.3)$$

**Momentele încovoietoare produc solicitarea de încovoiere. Deformația produsă de momentul încovoiător este de rotire a secțiunii în jurul axei respective:**  $M_z$  în jurul axei Oz și respectiv  $M_y$  în jurul axei Oy. Momentul  $M_z$  se consideră **pozitiv, când comprimă fibra superioară și întinde pe cea inferioară**, iar  $M_y$  este pozitiv când comprimă fibra din partea pozitivă a axei Oz și întinde fibra din partea negativă (fig. 2.4).

**Momentul de răsucire  $M_t$**  este egal cu suma algebrică a momentelor forțelor și a cuplurilor situate la stânga secțiunii (sau la dreapta luate cu semn minus) față de axa Ox:

$$M_t = \sum_1 M_x = -\sum_2 M_x . \quad (2.4)$$

**Momentul de torsiune este pozitiv** atunci când forțele sau cuplurile din stânga secțiunii rotesc în sens orar, iar cele din dreapta în sens antiorar.

**Prezența simultană în secțiunea barei a două sau mai multe eforturi produc, în bară, o solicitare compusă.**

În general, se determină eforturile de pe fața din dreapta secțiunii ( $O_2yz$  din fig.2.3,d) și în acest caz se reduc forțele din partea stângă a secțiunii. Când este mai simplu să se reducă forțele din partea dreaptă atunci se obțin eforturile de pe fața din stânga, care au însă sensuri opuse față de cele determinate în primul caz. Dacă s-au dedus forțele de pe partea din stânga a secțiunii și trebuie raportate la fața din dreapta atunci acestora li se schimbă semnul.

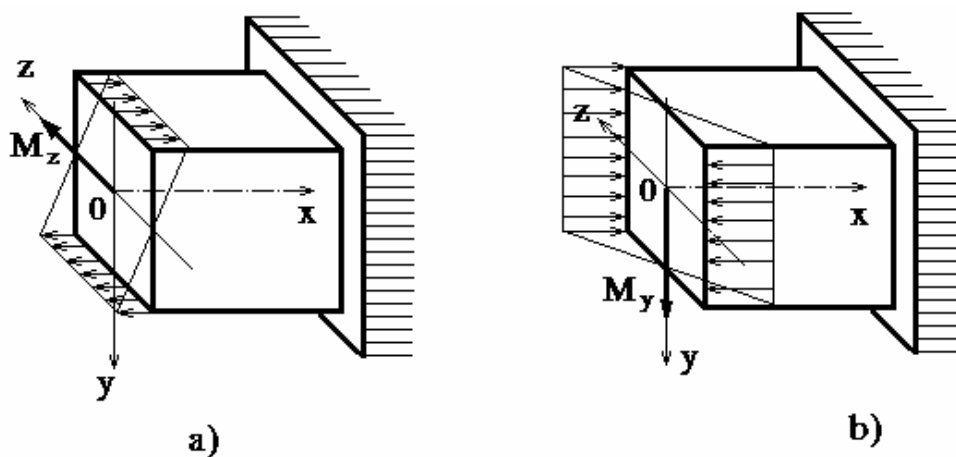


Fig. 2.4

De reținut că reprezentarea interacțiunii, prin forțe aplicate în O, este o reprezentare convențională simplă a fenomenului complex de interacțiune între cele două părți, (fig.2.3,b).

**Observație:** Se pot obține, mai simplu, eforturile din secțiune procedând astfel:

a) se analizează în ce parte a secțiunii sunt mai puține forțe și se **ia în considerare numai forțele din acea parte (din stânga sau din dreapta);**

b) se descompune fiecare forță, din acea parte, după direcțiile axelor în secțiune;

c) se reduce fiecare componentă obținută din forțe, în centrul de greutate al secțiunii;

d) se însumează proiecțiile forțelor și ale momentelor corespunzătoare pentru fiecare axă în parte, ținând seama de regula de semne, obținându-se astfel:

- $N$  = suma proiecțiilor forțelor pe axa  $Ox$ ;
- $T_y$  = suma proiecțiilor forțelor pe axa  $Oy$ ;
- $T_z$  = suma proiecțiilor forțelor pe axa  $Oz$ ;
- $M_y$  = suma proiecțiilor momentelor pe axa  $Oy$ ;
- $M_z$  = suma proiecțiilor momentelor pe axa  $Oz$ ;
- $M_x$  = suma proiecțiilor momentelor pe axa  $Ox$ .

## 2.4. Funcții de eforturi

Valorile eforturilor din secțiune ( $N$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_x$ ) variază în lungul barei, în funcție de modul de încărcare și de forma barei. Una din problemele principale, ale calculului de rezistență, este cunoașterea valorilor eforturilor din fiecare secțiune transversală. Astfel, se exprimă variația fiecărui efort în funcție de coordonatele punctelor axei și se obține câte o **funcție de eforturi**. Pentru o bară dreaptă, ce are axa orientată, după  $Ox$ , funcțiile de efort se exprimă în dependență de abscisa  $x$  a secțiunii:  $N = N(x)$ ;  $T_y = T_y(x)$ ;...  $M_z = M_z(x)$ .

Variația eforturilor în lungul axei barei, sub acțiunea sarcinilor fixe, poate fi urmărită cel mai bine pe **diagramele de eforturi**. Acestea sunt reprezentări grafice ale funcțiilor de eforturi în funcție de abscisa secțiunii "x" de pe axa barei. **Diagrama de efort se obține prin trasarea unei linii subțiri care să unească punctele ce satisfac ecuația funcției efortului respectiv**. Aceasta se **reprezintă în lungul unei linii de referință, trasată cu linie groasă, paralelă și de lungime egală cu axa barei**. Astfel, pentru fiecare efort se trasează câte o diagramă.

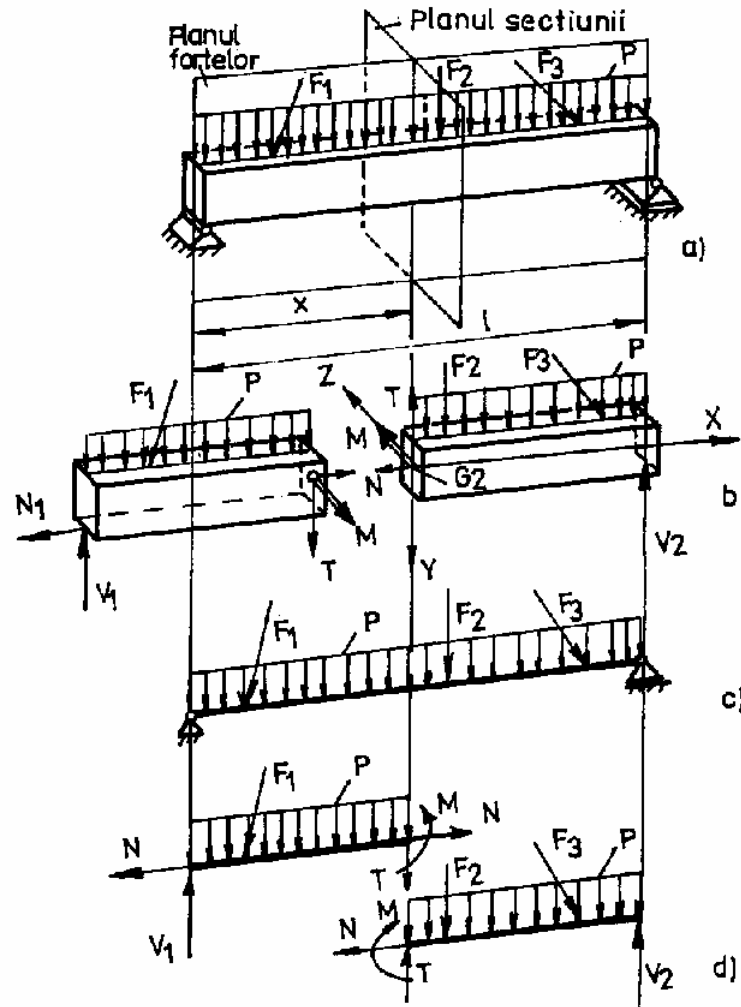


Fig. 2.5

În practică se întâlnesc frecvent bare drepte sau curbe plane, ce sunt încărcate cu forțe conținute în planul de simetrie longitudinal al barei. În figura (2.5,a), s-a reprezentat o astfel de bară unde s-a notat cu  $xOy$  planul forțelor. S-au determinat reacțiunile și apoi eforturile din secțiunea aflată la abscisa "x" de reazemul 1. În figura (2.5,b) s-a reprezentat bara respectivă pe care s-au figurat reacțiunile și respectiv eforturile interioare din secțiunea de abscisă "x".

În acest caz particular se pot determina eforturile:

a) **forța axială**, egală cu suma algebrică a proiecțiilor forțelor exterioare aplicate în stânga (sau în dreapta) secțiunii considerate pe axa barei;

b) **forța tăietoare**,  $T=T_y$ , egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa  $Oy$  a tuturor forțelor situate la stânga (sau la dreapta) secțiunii considerate;

c) **momentul încovoiator**,  $M=M_z$ , egal cu suma algebrică a momentelor forțelor în raport cu axa  $Oz$ , a tuturor forțelor și momentelor situate în stânga (sau în dreapta) secțiunii considerate.

În mod uzual, pentru trasarea diagramelor de eforturi pentru sarcini conținute într-un singur plan, se folosește schema plană din figura (2.5,d). Eforturile secționale, din stânga respectiv din dreapta secțiunii, se reprezintă ca în figura 2.5,d.

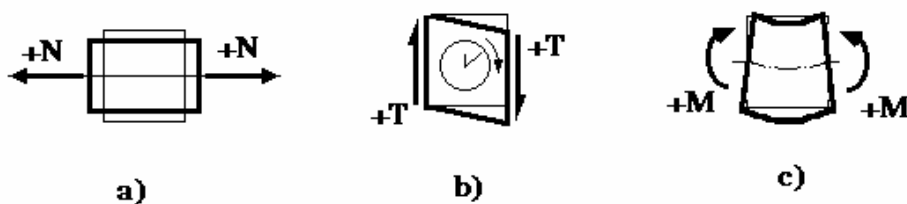


Fig. 2.6

Regula de semne pentru starea plană, este dată în figura 2.6:

- forța axială  $N$ , este pozitivă când lungește elementul de bară (fig.2.6,a) și negativă când scurtează elementul de bară.
- forța tăietoare  $T$ , este pozitivă când are tendința să rotească în sens orar elementul de bară (fig.2.6,b);
- momentul încovoietor  $M$ , se consideră pozitiv când rotește cele două fețe laterale, curbând fibrele, astfel ca fibrele superioare să se scurteze iar cele inferioare să se lungească (fig.2.6,c).

## 2.5. Relații diferențiale între sarcini și eforturi

Trasarea diagramelor de eforturi poate fi mult ușurată dacă se cunosc **atât funcțiile de eforturi cât și relațiile diferențiale între eforturi și diferite sarcini.**

Pentru a stabili relațiile diferențiale dintre sarcini și eforturi se consideră un element de bară curbă plană, asupra căruia acționează un sistem de sarcini conținute în planul axei barei. Elementul de bară, de lungime infinit mică  $ds$ , are raza de curbură  $r$ , iar unghiul format de cele două secțiuni este  $d\alpha$ . Lungimea elementului este  $ds = r \cdot d\alpha$  (fig.2.7,a).

Asupra elementului  $ds$  se consideră că acționează sarcinile:

- $q$ , uniform distribuită pe lungimea  $ds$ , a elementului;
- $F$  și  $M_e$ , concentrate și acționând în secțiunea ce trece prin punctul 0.

Așa cum s-a arătat și la observațiile de la §2.3, aceste **sarcini trebuie descompuse după direcțiile axelor de coordonate și se consideră că acționează asupra axei barei.** În figura (2.7,b) s-a reprezentat modul de acțiune al sarcinilor. Tot în figura (2.7,b) s-au

reprezentat eforturile:  $N, T, M$  în secțiunea  $O$  și respectiv  $N + \Delta N, T + \Delta T$  și  $M + \Delta M$  în secțiunea  $A$ .

Conform metodei secțiunilor (a lui Cauchy) dacă elementul inițial este în echilibru atunci și porțiunea din element de lungime  $ds$ , va trebui să fie în echilibru.

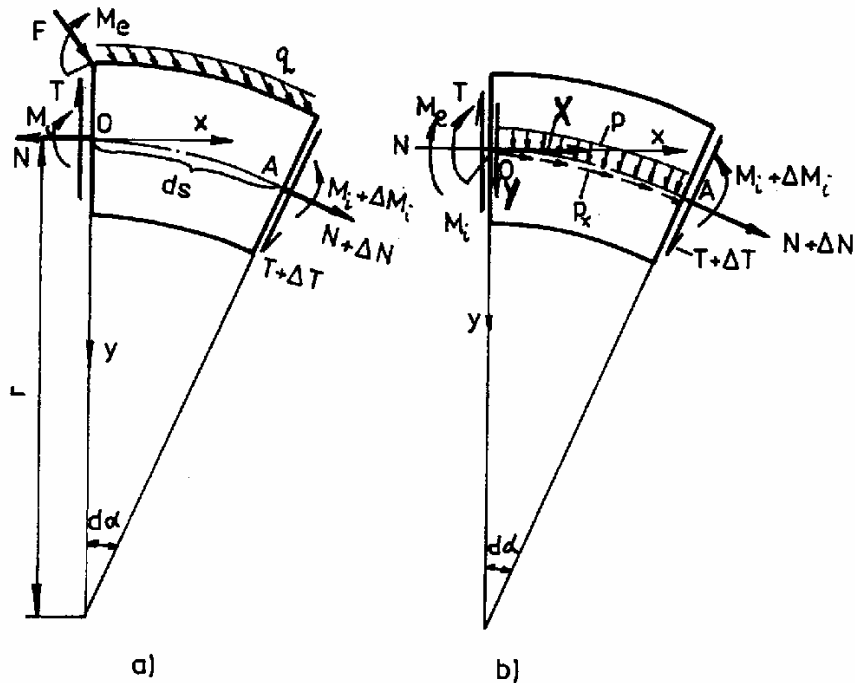


Fig. 2.7

Se pot scrie în acest caz ecuațiile:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Leftrightarrow (N + \Delta N) \cdot \cos d\alpha - N - (T + \Delta T) \cdot \sin d\alpha + X + p_x \cdot ds = 0, \\ \sum Y = 0 &\Leftrightarrow (T + \Delta T) \cdot \cos d\alpha - T + (N + \Delta N) \cdot \sin d\alpha + Y + p \cdot ds = 0, \\ \sum M_O = 0 &\Leftrightarrow (M + \Delta M) - M - (N + \Delta N) \cdot r \cdot (1 - \cos d\alpha) - \\ &\quad - (T + \Delta T) \cdot r \cdot \sin d\alpha - p \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} - M_e = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Întrucât unghiul  $d\alpha$  este foarte mic se aproximează:

$$\sin d\alpha \cong d\alpha \quad \text{și} \quad \cos d\alpha = 1.$$

Dacă se neglijează produsele infiniților mici relațiile (2.5) devin:

$$\begin{aligned} \Delta N - T \cdot d\alpha + X + p_x \cdot ds &= 0; \\ \Delta T + N \cdot d\alpha + Y + p \cdot ds &= 0; \\ \Delta M - T \cdot r \cdot d\alpha - M_e &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Aceste relații conțin termeni de mărime finită și de mărime infinit mică. Dacă se neglijează termenii infiniți mici față de termenii finiți se obțin ecuațiile:

$$\Delta N = -X, \quad \Delta T = -Y, \quad \Delta M = M_e \quad (2.7)$$

Neglijarea termenilor infinit mici se poate face (și trebuie să se facă) numai în dreptul sarcinilor concentrate. Din relațiile (2.7) rezultă: **în dreptul unei sarcini**

concentrate cel puțin un efort are un salt egal cu valoarea componentei sarcinii concentrate pe direcția respectivă. Spre exemplu, în dreptul unei forțe concentrate longitudinale  $X$ , în diagrama de forțe axiale va apare un salt egal cu valoarea componentei  $X$ , în dreptul unei forțe concentrate transversale  $Y$ , în diagrama forțelor tăietoare va trebui să existe un salt egal cu valoarea componentei  $Y$ , iar în dreptul unui moment concentrat  $M_e$ , în diagrama momentelor încovoietoare apare un salt egal cu valoarea momentului  $M_e$ .

Dacă, pe elementul  $ds$ , nu sunt aplicate sarcini concentrate ( $X=0$ ,  $Y=0$  și  $M_e=0$ ) atunci relațiile (2.7) trebuie să conțină numai termenii cu infiniți mici. În acest caz și variația eforturilor trebuie să fie infinit mică, așa că se consideră:

$$\Delta N \rightarrow dN, \quad \Delta T \rightarrow dT, \quad \Delta M \rightarrow dM.$$

Ținând seama de aceste relații și că  $ds=r \cdot d\theta$ , din (2.6) se obține:

$$\frac{dN}{ds} = \frac{T}{r} - p_x, \quad \frac{dT}{ds} = -\frac{N}{r} - p, \quad \frac{dM}{ds} = T. \quad (2.8)$$

În cazul barelor drepte ( $r = \infty$ ; rezultă  $ds = dx$ ) și în absența forțelor axiale relațiile (2.8) devin:

$$\frac{dM}{dx} = T, \quad \frac{dT}{dx} = -p. \quad (2.9)$$

Pe baza acestor relații rezultă:

- derivând expresia momentului încovoietor în raport cu variabila "x" se obține expresia forței tăietoare;

- derivând expresia forței tăietoare în raport cu variabila "x" se obține expresia sarcinii distribuite cu semnul minus.

Derivând încă o dată prima relație și ținând seama de a doua, se obține:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p. \quad (2.10)$$

**Observații:**

a) Relațiile (2.8), (2.9) și (2.10) sunt relații diferențiale ale funcțiilor de eforturi  $N(x)$ ,  $T(x)$  și  $M(x)$ . Diagramele de eforturi reprezintă integralele acestor expresii.

b) Relația (2.10) arată că ecuația forței tăietoare se poate obține, fie din integrarea expresiei sarcinii, fie din derivarea expresiei momentului încovoietor.

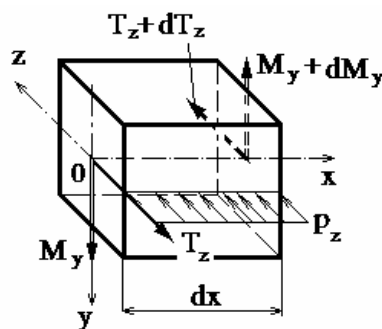


Fig. 2.8

c) Dacă sarcinile sunt conținute în planul xOy (fig.2.8) ecuațiile de echilibru sunt:

$$\begin{aligned} -T_z + p_z \cdot dx + (T_z + dT_z) &= 0, \\ M_Y - T_z \cdot dx + p_z \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (M_Y - dM_Y) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

astfel se obține:

$$\frac{dT_z}{dx} = T_z', \quad \frac{dM_Y}{dx} = M_Y' = -p_z \quad (2.11,a)$$

$$\frac{d^2M_Y}{dx^2} = M_Y'' = -p_z. \quad (2.11,b)$$

## 2.6. Reguli practice pentru trasarea diagramelor de eforturi

Pentru cazul când forțele transversale sunt nule ( $Y=0$ ;  $p=0$ ), din relațiile (2.10) se obține:

$$T = C_1, \quad M_1 = C_1 \cdot x + C_2. \quad (2.12)$$

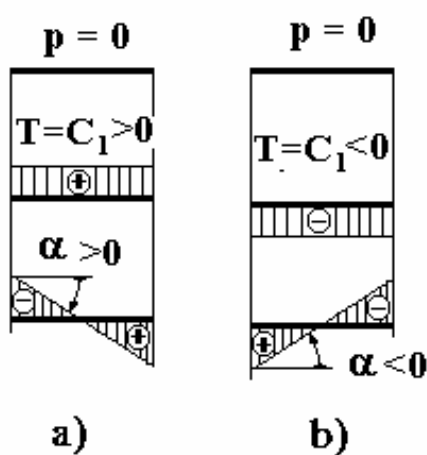


Fig. 2.9

Deci, când forțele transversale sunt nule, forța tăietoare este constantă iar momentul încovoietor variază liniar (fig.2.9,a și b).  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante de integrare și reprezintă forța tăietoare, respectiv momentul încovoietor, la limita din stânga sau din dreapta secțiunii considerate.

Dacă pe o porțiune de bară se aplică o forță transversală uniform distribuită ( $p=ct.$ ) atunci din relațiile (2.10) se obține:

$$\begin{aligned} T &= C_1 - p_1 \cdot x \quad (\text{variație liniară}), \\ M &= C_2 + C_2 \cdot x - p \cdot x^2 \quad (\text{variație parabolică}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pentru acest caz, s-au reprezentat câteva moduri de variație a forței tăietoare și momentului încovoietor, pentru o porțiune de bară (fig.2.10).

Relația a doua (2.10) arată că forța tăietoare este egală cu panta la curba momentelor încovoietoare.

Din figurile 2.9 și 2.10 se observă că pe porțiunea unde:

$T > 0 \rightarrow M$  crește,  
 $T < 0 \rightarrow M$  scade,  
 $T$  trece prin zero  $\rightarrow M_{\max}$  sau  $M_{\min}$ ,  
 $T = 0 \rightarrow M = \text{ct.}$

(2.14)

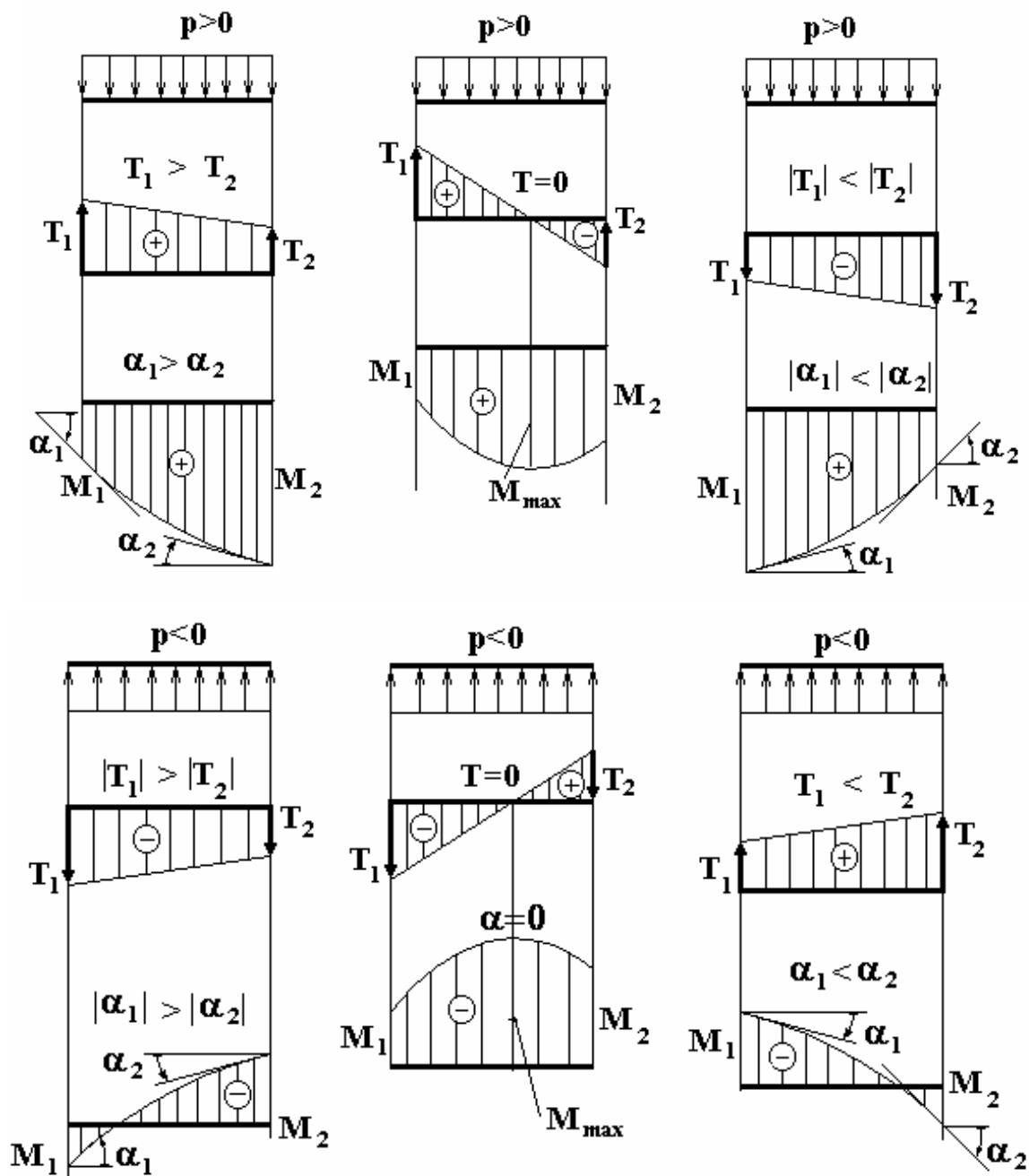


Fig. 2.10

Dacă se ține seama de relațiile (2.7), în cazul acțiunii sarcinilor concentrate, rezultă că unei variații bruște a forței tăietoare îi corespunde o schimbare bruscă a pantei momentului încovoiator. Așadar, **diagrama de momente are un punct de schimbare a pantei tangentei (se frânge) în dreptul sarcinii transversale concentrate.**



Pe lângă regulile menționate mai sus, pentru trasarea diagramelor de eforturi, este necesar să se respecte următoarele etape:

a) se eliberează bara de legături, se reprezintă reacțiunile și se determină valoarea acestora din ecuațiile de echilibru ;

b) se alege un sens de parcurs al barei, adică o origine axei  $Ox$  și sensul acesteia, care poate fi de la stânga la dreapta sau de la dreapta la stânga, de sus în jos sau de jos în sus etc.;

c) se stabilesc funcțiile de eforturi, adică expresiile  $N(x)$ ,  $T(x)$  și  $M(x)$  pentru fiecare tronson de bară;

d) pentru fiecare efort existent se trasează câte o **linie de referință groasă**, paralelă cu axa barei și de aceeași lungime cu aceasta;

e) forțele axiale, forțele tăietoare și momentele de răsucire pozitive se reprezintă la scară deasupra liniei de referință; momentele de încovoiere pozitive se reprezintă sub linia de referință;

f) reprezentarea eforturilor în diagrame se face prin trasarea unor **segmente de dreaptă perpendiculare pe linia de referință, ce reprezintă la scară, valoarea efortului respectiv.**

## 2.7. Diagrame de eforturi

Diagramele de eforturi sunt necesare pentru determinarea secțiunii periculoase și de aceea se trasează întotdeauna pentru toate barele solicitate. Pe diagrame se observă imediat atât **solicitările** cât și **secțiunile cele mai solicitate (periculoase)**, precum și valorile extreme ale eforturilor.

### 2.7.1. Bare drepte solicitate de forțe axiale

În aceste cazuri forțele exterioare ce acționează în lungul barei se reduc la rezultante a căror suport este chiar axa barei.

**Aplicația 2.1.** Să se traseze diagrama de eforturi pentru bara cu încărcarea din figura 2.11.

Eforturile sunt:

$$\begin{aligned} N_{1s} &= 0; \\ N_{1d} &= N_{2s} = -5P; \\ N_{2d} &= N_{3s} = P; \\ N_{3d} &= N_{4s} = 5P; \\ N_{4d} &= N_{5s} = 3P; \\ N_{5d} &= N_{6s} = -P; \\ N_{6d} &= 0. \end{aligned}$$

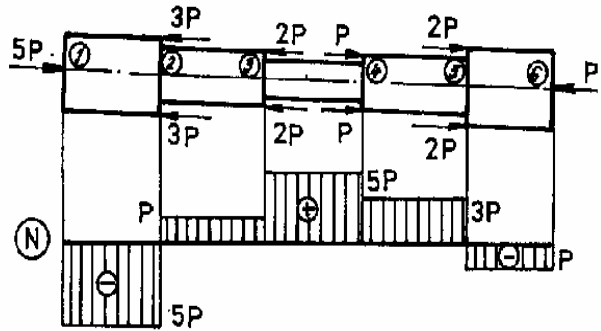


Fig. 2.11

**Aplicația 2.2.** Un stâlp vertical solicitat de sarcina axială  $P=500$  kN este format din două tronsoane și se sprijină pe un bloc de beton. Atât stâlpul, pe cele două tronsoane cât și fundația au secțiuni constante și lungimile din figura 2.12. Greutatea distribuită pe lungimea 1-2 este de  $q_1=25$  kN/m, pe porțiunea 2-3,  $q_2=35$  kN/m, iar a fundației de  $q_3=90$  kN/m. Să se traseze daigramele de eforturi.

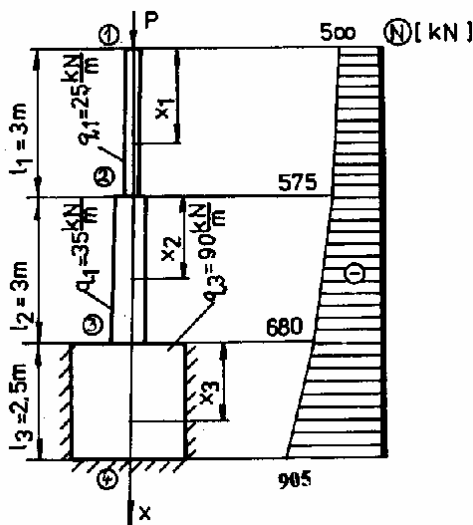


Fig. 2.12

Într-o secțiune oarecare, la abscisa

$x_1$ , forța axială este:

$$N(x_1) = -P - q_1 \cdot x_1,$$

$$N_{x_1} = -500 - 25 \cdot x_1,$$

deci, variază liniar.

Valorile extreme sunt:

$$N_1 = -500 \text{ kN}, \quad N_2 = -500 - 25 \cdot 3 = -575 \text{ kN}.$$

Într-o secțiune oarecare pe

tronsonul 2-3 forța axială are expresia:

$$N(x_2) = -P - q_1 \cdot l_1 - q_2 \cdot x_2,$$

iar valorile extreme vor rezulta:

$$N_2 = -500 - 25 \cdot 3 = -575 \text{ kN}, \quad N_3 = -500 - 25 \cdot 3 - 35 \cdot 3 = -680 \text{ kN}$$

Într-o secțiune pe porțiunea fundației forța axială este dată de expresia:

$$N(x_3) = -P - q_1 \cdot l_1 - q_2 \cdot l_2 - q_3 \cdot x_3,$$

iar valorile extreme sunt:

$$N_3 = -500 - 25 \cdot 3 - 35 \cdot 3 = -680 \text{ kN},$$

$$N_4 = -500 - 25 \cdot x_3 - 35 \cdot x_3 - 90 \cdot x_2 = -905 \text{ kN}.$$

Diagrama de variație a eforturilor axiale este redată în dreapta barei.

## 2.7.2. Bară (grindă) dreaptă solicitată la încovoiere

Pentru început se vor considera barele drepte solicitate de forțe exterioare verticale situate în unul din planele de simetrie longitudinale ale barei. În acest caz în secțiunile transversale ale barei, la acțiunea sarcinilor se produc: forțe axiale, forțe tăietoare și momente de încovoiere.

### 2.7.2.1. Bara (grindă) în consolă

La barele în consolă (încastate la un capăt și libere la celălalt) diagramele de eforturi se pot trasa și fără calculul prealabil al reacțiunilor. În acest caz se consideră originea sistemului de referință în capătul liber, iar reacțiunile vor fi egale cu valorile eforturilor din încastrare.

**Aplicatia 2.3.** Bara încastrată la un capăt și încărcată la celălalt cu o sarcină concentrată (fig.2.13). În figura (2.13,a), bara are capătul liber în dreapta, iar în figura (2.13,b), capătul liber este în stânga.

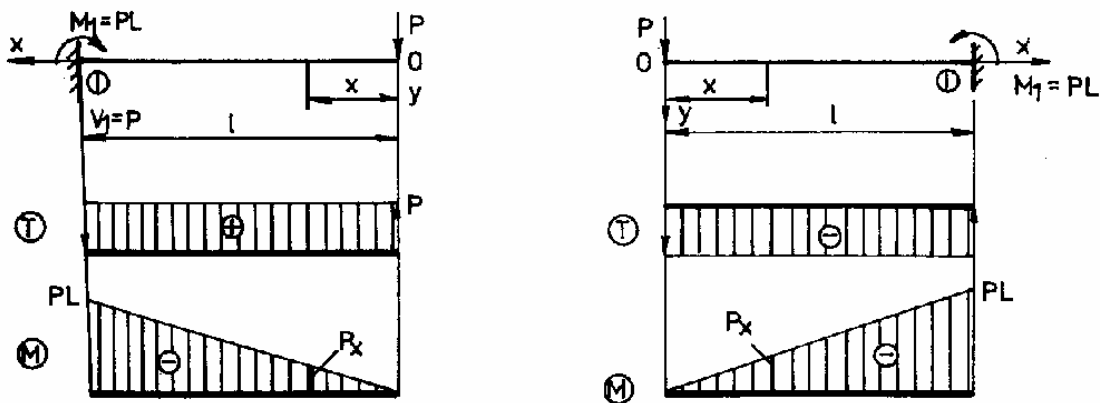


Fig. 2.13

Pentru bara din figura (2.13,a), funcțiile de eforturi sunt:

$$T_x = P = \text{ct.}$$

$$M_x = -P \cdot x \text{ (variază liniar) și are valorile } M_0 = 0 \text{ și } M_l = -P \cdot L.$$

Pentru bara din figura (2.13,b) eforturile sunt:

$$T_x = -P = \text{ct.}$$

$$M_x = -P \cdot x, \quad M_0 = 0 \text{ și } M_l = -P \cdot L.$$

**Observație:** Forțele tăietoare sunt egale în valoare absolută, dar diferă ca semn.

**Aplicația 2.4.** Bara în consolă solicitată de o forță transversală uniform distribuită (fig.2.14).

În secțiunea x eforturile sunt:

$$T_x = -p \cdot x \text{ (dreaptă),}$$

$$M_x = -p \cdot x \cdot x/2 = -p \cdot x^2/2 \text{ (parabolă),}$$

iar valorile extreme rezultă:

$$T_0 = 0; \quad T_1 = -p \cdot L; \quad M_0 = 0; \quad M_1 = -p \cdot L^2/2.$$

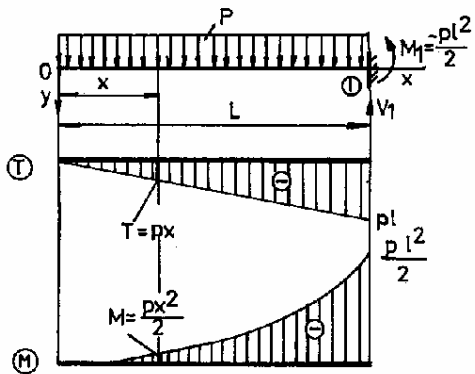


Fig. 2.14

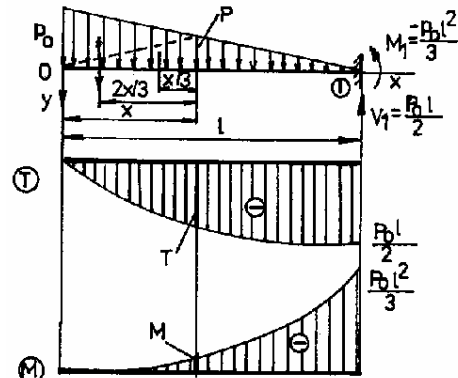


Fig. 2.15

Reacțiunile din încastrare sunt:

$$V_1 = p \cdot L; \quad M_1 = -p \cdot L^2/2.$$

**Aplicația 2.5.** Bară în consolă solicitată de o forță liniar distribuită (fig. 2.15).

Încărcarea este determinată de intensitatea maximă a sarcinii  $p_0$ . Sarcina totală pe bară este de  $p = p_0 \cdot L/2$ , iar intensitatea sarcinii într-o secțiune oarecare, la distanța x de capăt, este:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Eforturile în secțiunea x sunt:

$$T_x = -(p_0 + p) \cdot \frac{x}{2} = -\frac{p_0 \cdot x}{2} \cdot \left(2 - \frac{x}{L}\right),$$

$$M_x = -p_0 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{3} - p \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{p_0 \cdot x^2}{6} \cdot \left(3 - \frac{x}{L}\right).$$

Se observă că forța tăietoare variază după o parabolă de gradul 2, iar momentul încovoietor după o parabolă de gradul 3. În cele două capete ale barei eforturile vor avea valorile:

$$T_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad T_1 = -p_0 \cdot L/2, \quad M_1 = -p_0 \cdot L/3,$$

iar reacțiunile vor fi:

$$V_1 = p_0 \cdot \frac{L}{2}, \quad M_1 = -\frac{p_0 \cdot L^2}{3}.$$

**Observații:**

a) Forța tăietoare într-o secțiune oarecare x este egală cu suprafața diagramei forțelor distribuite pe lungimea Ox;

b) Momentul încovoietor într-o secțiune x este produsul între rezultanta forțelor pe lungimea Ox și distanța de la secțiunea x, la rezultantă.

**2.7.2.2. Bara (grinda) simplu rezemată**

Bara simplu rezemată are la un capăt un reazem simplu iar la celălalt o articulație. În articulație se vor considera două componente ale reacțiunii și anume V pe verticală și H pe orizontală. În reazemul simplu apare o singură reacțiune și anume o forță normală pe suprafața de rezemare.

Distanța dintre cele două reazeme, este L și se numește deschiderea barei (grinzii).

**Aplicația 2.6.** Bara simplu rezemată sollicitată de o forță concentrată Q ce acționează oblic (fig.2.16).

Se descompune forța Q în componentele:

$$P = Q \cdot \cos\alpha \quad \text{și} \quad H = Q \cdot \sin\alpha.$$

Reacțiunile au valorile:

$$H_2 = H = Q \cdot \sin\alpha; \quad V_1 = P \cdot b/L \quad \text{și} \quad V_2 = P \cdot a/L.$$

Într-o secțiune oarecare x, situată în stânga sarcinii Q eforturile sunt:

$$N_x = 0; \quad T_x = V_1 = P \cdot b/L; \quad M_x = V_1 \cdot x = P \cdot b \cdot x/L.$$

Forța axială și forța tăietoare au valori constante,

$$N_{1d} = 0; \quad T_{1d} = V_1 = P \cdot b/L,$$

$$M_1 = 0; \quad M_{3s} = P \cdot a \cdot b/L.$$

Considerând originea în 2 (pornind din partea dreaptă) se obțin eforturile în secțiunea x<sub>1</sub>:

$$N_{x_1} = H_2 = Q \cdot \sin\alpha;$$

$$T_{x_1} = -P \cdot a/L,$$

$$M_{x_1} = V_2 \cdot x_1 = P \cdot a \cdot x_1/L.$$

Eforturile în secțiunile 2 și 3 sunt:

$$N_{2s} = N_{3d} = N_{x_1} = Q \cdot \sin\alpha;$$

$$T_{2s} = T_{3d} = V_2 = -P \cdot a/L;$$

$$M_2 = 0; \quad M_{3d} = P \cdot a \cdot b/L.$$

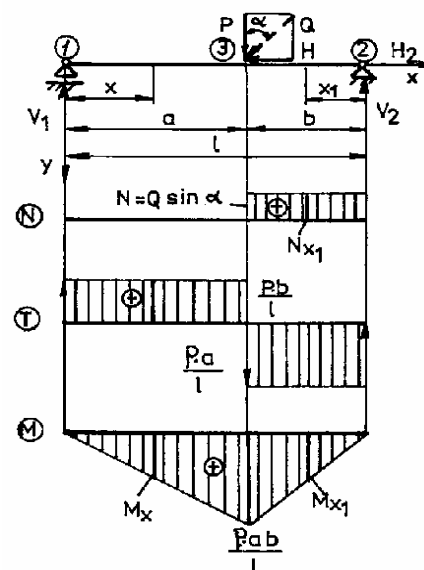


Fig. 2.16

**Observații:**

a) Forța axială are valoare constantă și diferită de zero între articulație și punctul de aplicație al forței Q;

b) Forța tăietoare are valoare constantă, egală cu valoarea reacțiunii  $V_1$  pe porțiunea 1-3, **are un salt egal cu valoarea componentei verticale P în dreptul forței Q**, iar pe porțiunea 3-2 are valoare constantă și egală și de sens opus reacțiunii  $V_2$ ;

c) Momentul încovoietor are variație liniară pe ambele porțiuni (unde forțele tăietoare sunt constante) și este maxim în dreptul forței concentrate (unde forța tăietoare trece prin zero).

Dacă poziția forței este variabilă pe bară, se poate determina poziția pentru care se poate produce cel mai mare moment încovoietor, numit **moment maxim-maximorum**. Aceasta se obține înlocuind  $b = L - a$ , în ecuația momentului maxim, derivând în raport cu  $a$  și considerând derivata egală cu zero:

$$\frac{d}{da}(M_{\max}) = \frac{d}{da}\left(P \cdot a \cdot \frac{L-a}{L}\right) = \frac{P}{L}(L - 2 \cdot a) = 0$$

din care rezultă distanța  $a$  pentru care se obține momentul cel mai mare.

Aceasta se produce când sarcina acționează la mijlocul barei:  $a = L/2$  (fig.2.17).

În acest caz, din cauza simetriei, reacțiunile sunt:

$$V_1 = V_2 = P/2.$$

Eforturile în secțiunea  $x$  (din stânga) sunt:

$$T_x = V_1 = P/2,$$

$$M_x = V_1 \cdot x = P \cdot x/2.$$

iar în secțiunea  $x_1$  (din dreapta):

$$T_{x_1} = -V_2 = -P/2,$$

$$M_{x_1} = V_2 \cdot x_1 = P \cdot x_1/2.$$

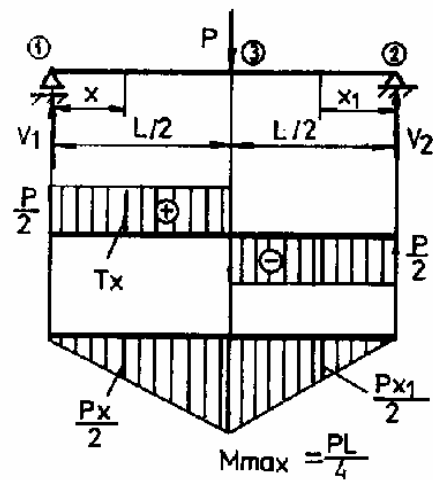


Fig. 2.17

Momentul încovoietor maxim, în secțiunea din dreptul forței este:

$$M_{\max} = \frac{P \cdot L}{4}.$$

**Aplicația 2.7.** Să se determine poziția a două forțe concentrate  $P_1 \geq P_2$ , mobile pe o bară simplu rezemată, care produc momentul maxim-maximorum (fig. 2.18).

Reacțiunea din reazemul 1 este:

$$V_1 = \frac{R \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)}{L}.$$

Momentul maxim este în dreptul forței  $P_1$ , și are expresia:

$$M_{\max} = V_1 \cdot \left(\frac{L}{2} + x - a\right) = \left(L^2 - 2 \cdot a \cdot L - 4 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot x\right) \cdot \frac{R}{4L}.$$

Momentul maxim-maximorum se obține pentru valoarea lui  $x$  ce anulează derivata expresiei momentului încovoiator maxim:

$$\frac{dM_{\max}}{dx} = (-2 \cdot x + a) \cdot \frac{R}{4L} = 0,$$

adică pentru  $x = a/2$ .

Pentru  $x = a/2$  rezultă momentul maxim-maximorum:

$$M_{\max \max} = (P_1 + P_2) \cdot \frac{(L - a)^2}{4}. \quad (2.15)$$

**Observație:** Dacă pe o bară se mișcă un convoi de forțe concentrate  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, \dots, P_n$  (fig.2.19) în care  $P_k$  este forța ce are valoarea cea mai mare din imediata vecinătate a rezultantei, momentul maxim se va produce în dreptul acesteia. Notând cu  $x$  distanța de la mijlocul barei la rezultanta forțelor aflate pe bară și cu "a" distanța dintre rezultantă și forța  $P_k$ , se poate calcula reacțiunea  $V_1$  și apoi momentul maxim:

$$V_1 = \frac{R \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)}{L},$$

$$\begin{aligned} M_{\max} &= V_1 \cdot \left(\frac{L}{2} + x - a\right) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot c_i = \\ &= \frac{R}{L} \cdot \left(\frac{L}{4} - \frac{a \cdot L}{2} - a \cdot x - x^2\right) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot c_i \end{aligned}$$

în care s-a notat cu  $P_i$  sarcinile aflate la stânga forței  $P_k$  iar cu  $c_i$  distanța de la forța  $P_k$  la forțele  $P_i$ .

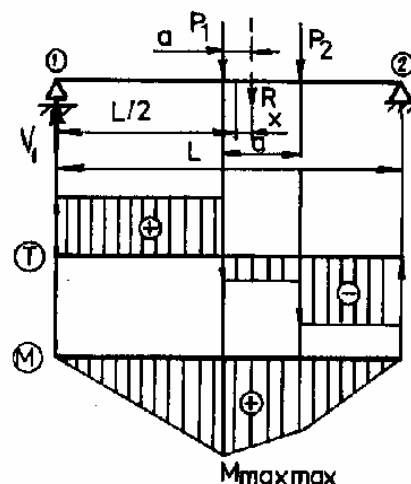


Fig. 2.18

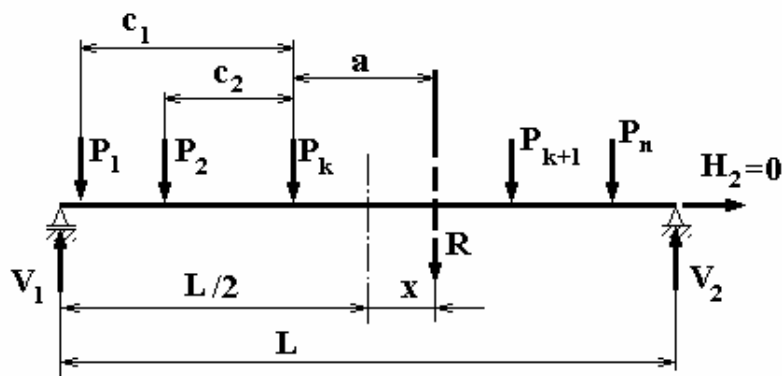


Fig. 2.19

Prin derivare și anularea derivatei momentului maxim se obține distanța  $x = a/2$  pentru care se produce  $M_{\max-\max}$ :

$$M_{\max-\max} = \frac{R}{4} \cdot (L - a^2) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot c_i.$$

**Aplicația 2.8.** Bară simplu rezemată, solicitată de sarcini transversale uniform distribuite (fig.2.20).

Încărcarea fiind simetrică reacțiunile sunt:

$$V_1 = V_2 = p \cdot L/2.$$

Eforturile într-o secțiune x sunt:

$$T_x = V_1 - p \cdot x = p \cdot (L/2 - x), \text{ (variază liniar);}$$

$$M_x = V_1 \cdot x - p \cdot x \cdot x/2 = p \cdot x \cdot (L - x)/2, \text{ (variază parabolic).}$$

Valorile în punctele de rezemare sunt:

$$T_1 = V_1 = p \cdot L/2, \quad M_1 = 0,$$

$$T_2 = V_2 = -p \cdot L/2, \quad M_2 = 0.$$

La distanța  $x_0 = L/2$ ;  $T = 0$  și deci

$$M_{\max} = p \cdot L^2/8.$$

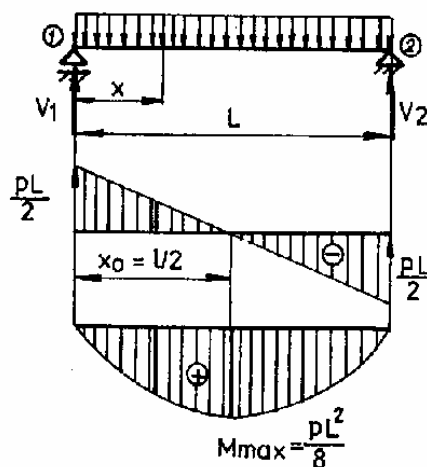


Fig. 2.20

**Observație:**

Dacă se notează cu  $P = p \cdot L$ , sarcina de pe bară, se observă că momentul maxim ( $M_{\max} = p \cdot L^2/8$ ) este jumătate din momentul maxim produs de sarcina concentrată P care ar acționa la mijlocul barei, când  $M_{\max} = P \cdot L/4$  (vezi fig.2.17).



**Aplicația 2.9.** Bară simplu rezemată solicitată de o sarcină transversală ce variază liniar (fig.2.21).

Reacțiunile au valorile:

$$V_1 = \frac{1}{L} \cdot \frac{p \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{3} = \frac{p \cdot L}{6},$$

$$V_2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{p \cdot L}{2} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} = \frac{p \cdot L}{3}.$$

Valoarea sarcinii în secțiunea x este:

$$p_x = p \cdot \frac{x}{L}.$$

Eforturile în secțiunea x sunt:

$$T_x = V_1 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot p_x = p \cdot \frac{L}{6} - p \cdot \frac{x^2}{2L},$$

(parabolă de gradul 2),

$$M_x = V_1 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot p_x \cdot \frac{x}{3} =$$

$$= \frac{p \cdot L}{6} \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{L} \cdot \frac{x}{3} = p \cdot \frac{L^2 - x^2}{6L} \cdot x,$$

(parabolă de gradul 3).

Valorile eforturilor în rezeme sunt:

$$T_{\max} = T_1 = V_1 = p \cdot L/6, \quad M_1 = 0,$$

$$T_{\min} = T_2 = -V_2 = -p \cdot L/3, \quad M_2 = 0.$$

Din condiția:

$$T_x = \frac{p \cdot L}{6} - \frac{p \cdot x_0^2}{2L} = 0,$$

rezultă abscisa secțiunii unde momentul încovoietor are valoarea maximă:

$$x_0 = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,5574 \cdot L,$$

iar momentul maxim, rezultă:

$$M_{\max} = p \cdot \frac{L^2 - x_0^2}{6} \cdot x_0 = \frac{p \cdot L^2}{9\sqrt{3}}.$$

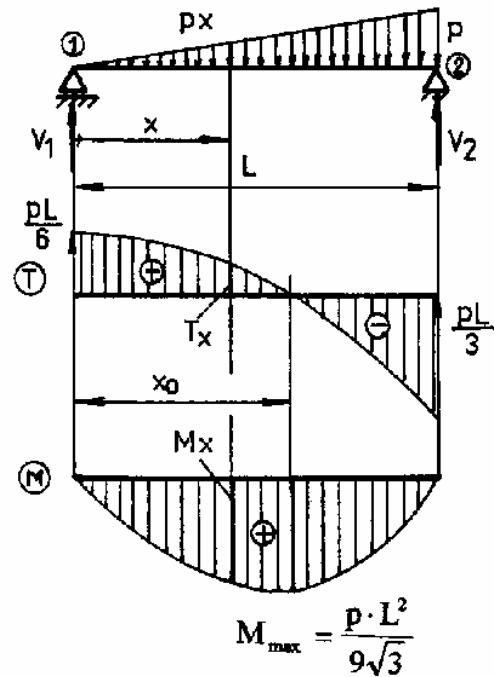


Fig. 2.21

**Aplicația 2.10.** Bară simplu rezemată solicitată de un cuplu  $M_e$  (fig.2.22).

Reacțiunile din reazeme sunt:

$$V_1 = V_2 = \frac{M_e}{L}.$$

Eforturile în secțiunea  $x$  respectiv  $x_1$  sunt:

$$T_x = T_{x_1} = V_1 = \frac{M_e}{L}, (\text{constantă}),$$

$$M_x = -V_1 \cdot x = -M_e \cdot \frac{x}{L}, (\text{variație liniară}),$$

$$M_{x_1} = V_2 \cdot x_1 = M_e \cdot \frac{x_1}{L}, (\text{variație liniară}).$$

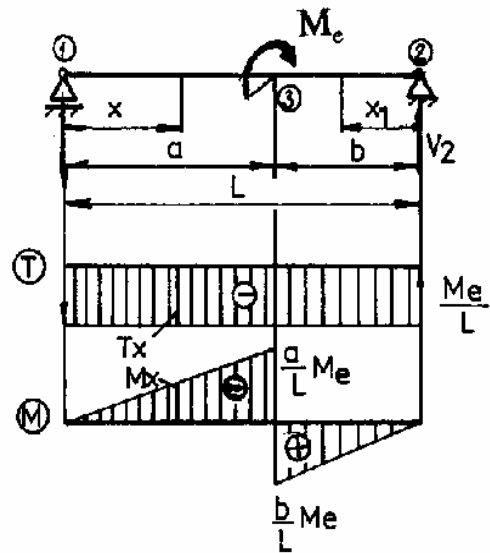


Fig. 2.22

Momentul încovoiitor este zero în reazeme ( $x = 0$  și  $x_1 = 0$ ) și are valorile extreme la stânga și respectiv la dreapta secțiunii 3 și sunt:

$$M_{3s} = -V_1 \cdot a = -\frac{a}{L} \cdot M_e, \quad M_{3d} = V_2 \cdot b = \frac{b}{L} \cdot M_e.$$

În dreptul cuplului, diagrama momentelor încovoiitoare are un salt egal cu valoarea cuplului  $M_e$ : de la  $-\frac{a}{L} \cdot M_e$ , la  $\frac{b}{L} \cdot M_e$ .

**Aplicația 2.11.** Bară încastrată la un capăt, rezemată la celălalt cu articulație intermediară, solicitată de o forță concentrată (fig. 2.23).

Articulația intermediară transmite numai eforturi tangențiale și normale dar nu transmite momente încovoiitoare. Ținând seama de această situație, bara se poate separa, în dreptul articulației, în două grinzi. Reacțiunile intermediare, din articulație, sunt tocmai eforturile din secțiunea respectivă.

Valoarea reacțiunii  $V_4$  este:

$$V_4 = \frac{P \cdot b}{b + b} = \frac{P}{2},$$

iar valoarea reacțiunii din articulația 2, care este tocmai forța tăietoare din secțiune este:

$$T_2 = P - V_4 = P/2$$

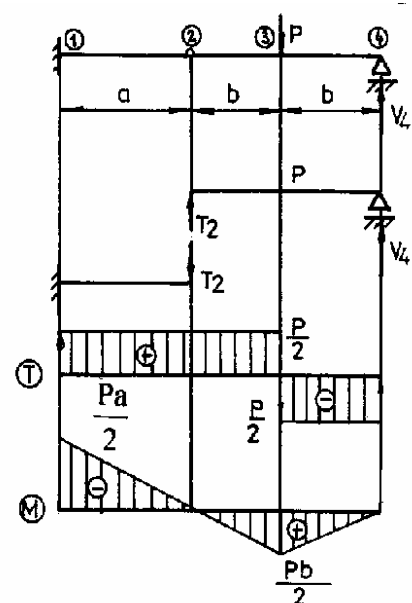


Fig. 2.23

Porțiunea 1-2 este o bară în consolă acționată la capătul liber de forța  $T_2$ . În acest caz se obțin eforturile:

$$T_{4d} = T_{3s} = -V_4 = -\frac{P}{2}, \quad T_{3d} = T_{2s} = T_1 = \frac{P}{2},$$

$$M_4 = 0, \quad M_3 = V_4 \cdot b = \frac{P \cdot b}{2}, \quad M_2 = 0, \quad M_1 = -T \cdot a = -\frac{P \cdot a}{2}.$$

**Observație:** După ce bara se separă în două părți, în dreptul articulației intermediare, problema trasării diagramelor de eforturi se reduce la cazuri cunoscute ale barelor rezultate din separare.

### 2.7.3. Diagrame de eforturi la arbori

Arborii sunt bare încărcate cu forțe ale căror direcții nu trec prin axa barei, sau asupra lor acționează cupluri de forțe situate în plane perpendiculare pe axa barei. Forțele sau cuplurile de forțe se transmit la arbori prin roți dințate, roți de curea, pârghii, cuplaje, etc.

Valoarea momentului de răsucire se calculează fie în funcție de distanța de la suportul forței la axa arborelui (brațul forței), fie în funcție de puterea și turația ce trebuie transmisă.

Dacă un arbore transmite o putere  $P^*$ , dată în kW, la o turație  $n$ , în rot/min, atunci momentul de torsiune rezultă din relația:

$$P^* = M_t \cdot \omega = M_t \cdot \frac{\pi \cdot n}{30},$$

astfel că:

$$M_t [\text{kNm}] = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P^* [\text{kW}]}{n [\text{rot/min}]} \quad (2.16)$$

Dacă puterea se dă în W momentul de torsiune rezultă în Nm. Când puterea este dată în CP (cai putere), pentru a obține momentul de torsiune, se utilizează relația:

$$M_t [\text{kNm}] = 7,02 \cdot \frac{P^* [\text{CP}]}{n [\text{rot/min}]} \quad (2.17)$$

Momentul de torsiune se consideră pozitiv când vectorul moment de răsucire din stânga are sensul axei  $Ox$ , sau când rotește secțiunea din stânga față de cea din capătul din dreapta în sensul burghiului drept.

**Aplicația 2.12.** Să se traseze diagramele de puteri și de momente de torsiune pentru un arbore drept ce primește o putere  $P^* = 10 \text{ kW}$  la o turație  $n = 125 \text{ rot/min}$  prin roata (3) și o distribuie astfel:

- 25% la roata (1),
- 30% la roata (2),
- și restul la roata (4).

Puterile pe cele trei intervale sunt:

$$P_{1-2}^* = -0,25 \cdot P^* = -2,5 \text{ kW}$$

$$P_{2-3}^* = (-0,25 + 0,3) \cdot P^* = -5,5 \text{ kW}$$

$$P_{3-4}^* = (1 - 0,25 - 0,3) \cdot P^* = 4,5 \text{ kW}$$

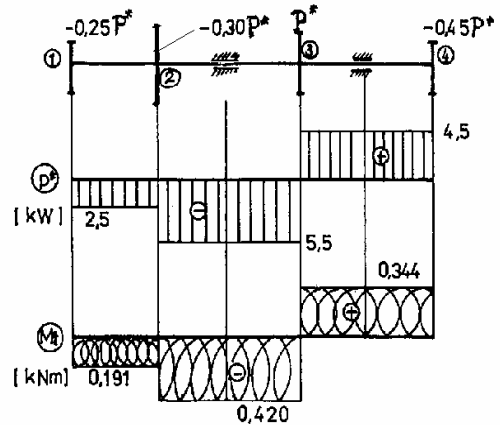


Fig. 2.24

Variația puterii este dată în diagrama  $P^*$  din figura 2.24.

Valorile momentelor de torsiune pe cele trei intervale sunt:

$$M_{t_{1-2}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P_{1-2}}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{-2,5}{125} = -0,191 \text{ kNm},$$

$$M_{t_{2-3}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P_{2-3}}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{-5,5}{125} = -0,42 \text{ kNm},$$

$$M_{t_{3-4}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P_{3-4}}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{4,5}{125} = 0,344 \text{ kNm}.$$

Diagrama de variație a momentelor de răsucire  $M_t$ , este reprezentată în fig. 2.24.

**Observație:** Preluarea puterii prin roata mediană și transmiterea acesteia la roțile dispuse de o parte și de cealaltă a roții motoare constituie una din cele mai eficiente moduri de încărcare a arborelui. În acest mod puterea se distribuie în mod aproape egal atât în stânga cât și în dreapta roții motoare. Dacă roata motoare se află la unul din capetele arborelui, în vecinătatea acesteia acționează întreaga putere de 10 kW, respectiv întregul moment de răsucire,  $M_t = 0,42 + 0,34 = 0,764 \text{ kNm}$ . În acest caz arborele trebuie dimensionat la un moment de răsucire aproape dublu.

## 2.7.4. Diagrame de eforturi la bare curbe

În *Rezistența materialelor* se analizează starea de eforturi în barele curbe plane de curbura constantă. În aceste cazuri bara este un arc de cerc.

Ca și la barele drepte, la cele curbe se alege un sens de parcurs care se marchează printr-un unghior (arc de cerc ce are la un capăt un punct de pornire și la celălalt o săgeată).

Pentru trasarea diagramei de eforturi se utilizează relațiile (2.7) și (2.8), iar diagramele se hașurează cu linii normale pe bară. Valorile eforturilor se calculează pentru anumite valori ale unghiului  $\alpha$ .

**Aplicația 2.13.** Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din figura 2.25.

Funcțiile de eforturi și valorile acestora în punctele cele mai importante sunt date sub formă tabelară, iar diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 2.26

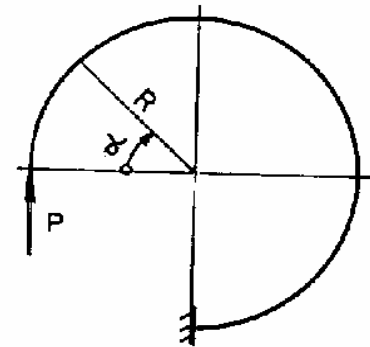


Fig. 2.25

$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
$N = -P \cdot \cos\alpha$	$-P$	$0$	$P$	$0$
$T = P \cdot \sin\alpha$	$0$	$P$	$0$	$-P$
$M = P \cdot R \cdot (1 - \cos\alpha)$	$0$	$P \cdot R$	$2 \cdot P \cdot R$	$P \cdot R$

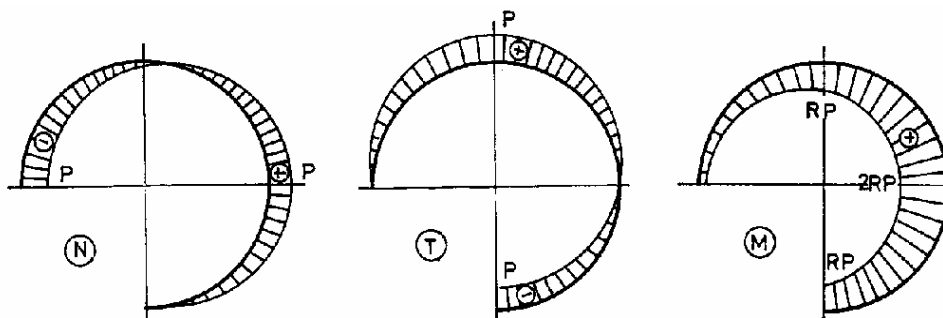


Fig. 2.26

### 2.7.5. Diagrame de eforturi la bare drepte

**Aplicația 2.14.** Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara din figura 2.27.

**Rezolvare:**

Se eliberează bara de legături, prin introducerea forțelor corespunzătoare legăturilor barei. Articulația din punctul 1 va fi înlocuită prin două forțe  $V_1$  și respectiv  $H_1=0$ , iar reazemul simplu din punctul 2 prin forța  $V_2$ .

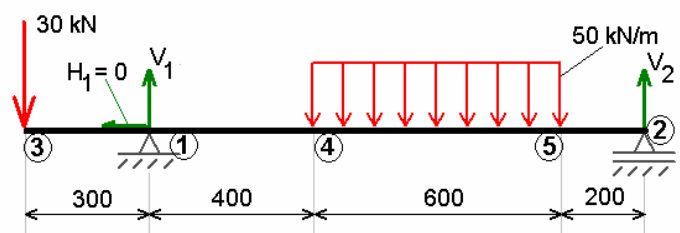


Fig. 2.27

Se determină valoarea și sensul forțelor din legături (se calculează reacțiunile), după care se verifică valorile obținute.

Determinarea celor două necunoscute se realizează utilizând următoarele ecuații:

$$\sum M_2 = 0, \text{ pentru determinarea lui } V_1;$$

$$\sum M_1 = 0, \text{ pentru determinarea lui } V_2;$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow 30 \times 1,5 - V_1 \times 1,2 + 50 \times 0,6 \times \left( \frac{0,6}{2} + 0,2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{30 \times 1,5 + 50 \times 0,6 \times 0,5}{1,2} = 50 \text{ kN};$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow -30 \times 0,3 + 50 \times 0,6 \times \left( \frac{0,6}{2} + 0,4 \right) - V_2 \times 1,2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{50 \times 0,6 \times 0,7 - 30 \times 0,3}{1,2} = 10 \text{ kN};$$

Verificarea reacțiunilor  $V_1$  și  $V_2$  se realizează prin utilizarea relației:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - 30 - 50 \times 0,6 = 50 + 10 - 30 - 30 = 0.$$

Se alege un sens de parcurgere al barei (sensul de măsurare a cotei  $x$ ), pentru a preciza poziția planului imaginar de secționare.

Se recomandă să se aleagă sensul de parcurs de la capătul barei spre interiorul ei. Se adoptă această modalitate de parcurgere a barei pentru a se obține relații de calcul a eforturilor cât mai simple. În cazul acestei aplicații, s-a ales ca sens de parcurs al barei sensul dinspre stânga spre dreapta (fig. 2.28).

În cazul acestei aplicații nu va exista diagrama de forțe axiale, deoarece nu există nicio sarcină exterior aplicată pe direcția axei barei.

Pentru intervalul 3-1  $x_1 \in [0; 0,3 \text{ m}]$  avem următoarele legi de variație a eforturilor:

$$T_{x_1} = -30;$$

$$M_{x_1} = -30 \cdot x_1;$$

$$\text{pentru: } x_1 = 0$$

$$T_3 = -30 \text{ kN};$$

$$M_3 = 0;$$

$$\text{pentru: } x_1 = 0,3 \text{ m}$$

$$T_{1st} = -30 \text{ kN};$$

$$M_{1st} = -9 \text{ kNm};$$

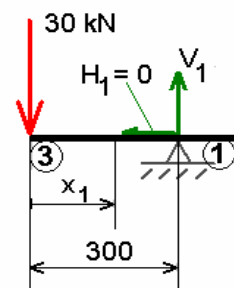


Fig. 2.28

**Observație:** S-a notat  $T_{1st}$  pentru că în punctul (1) se găsește o forță concentrată și ca atare forța tăietoare trebuie calculată la stânga și la dreapta punctului de aplicare a forței.

Pentru intervalul 1-4  $x_2 \in [0;0,4\text{ m}]$  (fig. 2.29), avem următoarele legi de variație a eforturilor:

$$T_{x_2} = -30 + V_1;$$

$$M_{x_2} = -30 \cdot (0,3 + x_2) + V_1 \cdot x_2;$$

pentru:  $x_2 = 0$

$$T_{1dr} = 20 \text{ kN};$$

$$M_{1dr} = -9 \text{ kNm};$$

pentru:  $x_2 = 0,4\text{ m}$

$$T_4 = 20 \text{ kN};$$

$$M_4 = -1 \text{ kNm};$$

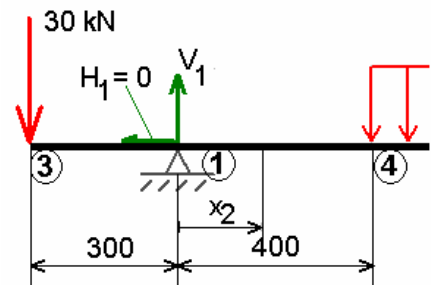


Fig. 2.29

Pentru intervalul 4-5  $x_3 \in [0;0,6\text{ m}]$  (fig. 2.30), avem următoarele legi de variație a eforturilor:

$$T_{x_3} = -30 + V_1 - 50 \cdot x_3;$$

$$M_{x_3} = -30 \cdot (0,7 + x_3) + V_1 \cdot (0,4 + x_3) - 50 \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2};$$

pentru:  $x_3 = 0$

$$T_4 = 20 \text{ kN};$$

$$M_4 = -1 \text{ kNm};$$

pentru:  $x_3 = 0,6\text{ m}$

$$T_5 = -10 \text{ kN};$$

$$M_5 = 2 \text{ kNm};$$

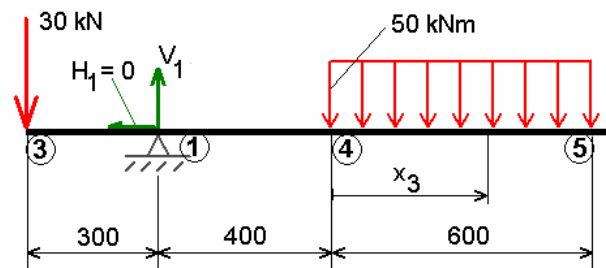


Fig. 2.30

**Observație:** Se observă că la extremitățile intervalului 4-5 forțele tăietoare au valori cu semne diferite, deci în acest interval există un punct în care forța tăietoare va avea valoarea zero. Trebuie determinată cu exactitate poziția acestui punct deoarece momentul încovoiator va avea un extrem în acest punct.

Dacă se notează coordonata acestui punct cu  $x_0$  vom avea:

$$T_{x_0} = 0 \Rightarrow -30 + V_1 - 50 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{V_1 - 30}{50} = 0,4\text{ m};$$

$$M_{x_0} = -30 \cdot (0,7 + x_0) + V_1 \cdot (0,4 + x_0) - 50 \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{x_0} = -30 \cdot 1,1 + V_1 \cdot 0,8 - 50 \cdot \frac{0,4^2}{2} \Rightarrow M_{x_0} = 3 \text{ kNm};$$

Ultimul interval al barei va fi parcurs de la dreapta la stânga, fiind mult mai ușor de scris legile de variație a eforturilor. Astfel pentru intervalul 2-5  $x_4 \in [0;0,2\text{ m}]$  (fig. 2.31), avem următoarele legi de variație a eforturilor:

$$T_{x_4} = -V_2;$$

$$M_{x_4} = V_2 \cdot x_3;$$

pentru:  $x_4 = 0$

$$T_2 = -10\text{ kN};$$

$$M_2 = 0\text{ kNm};$$

pentru:  $x_4 = 0,2\text{ m}$

$$T_5 = -10\text{ kN};$$

$$M_5 = 2\text{ kNm};$$

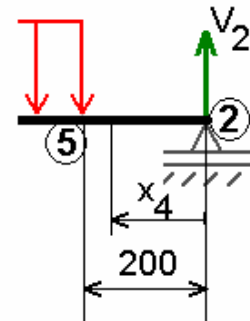


Fig. 2.31

Cu valorile astfel calculate se trasează diagramele de eforturi. Aceste diagrame sunt prezentate în figura 2.32.

**Observații:**

a) în punctele unde pe bară există sarcini concentrat aplicate (forțe sau momente), în diagramele corespunzătoare acestor sarcini, apar salturi ale valorilor eforturilor. Aceste salturi sunt egale cu valoarea sarcinilor concentrat aplicate și în sensul acestor sarcini. (punctele 1, 2 și 3 pentru forța tăietoare) În aceste puncte mărimea eforturilor se determină la stânga și la dreapta punctului.

b) în punctele unde forța tăietoare are un salt diagrama de momente are o discontinuitate ("se frânge").

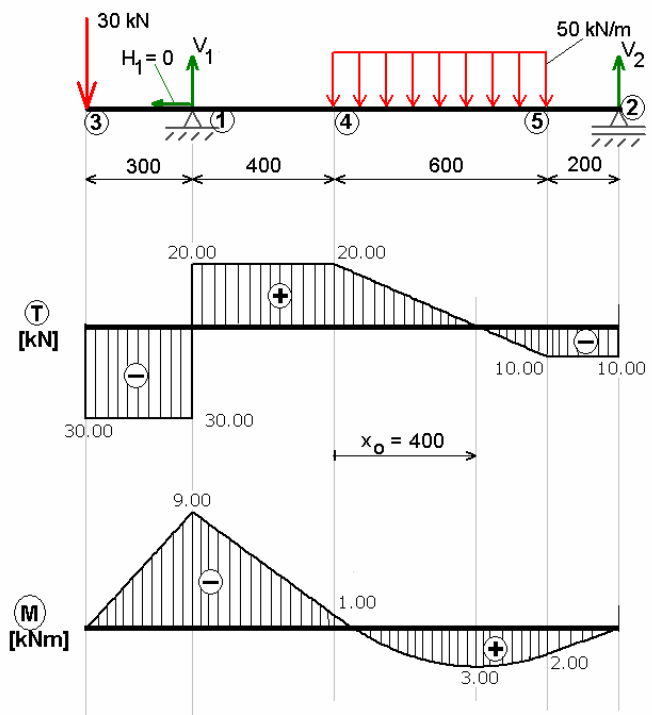


Fig. 2.32

c) pe intervalul unde sarcina este distribuită uniform (4-5) forța tăietoare variază liniar iar momentul are o variație parabolică.

d) pe intervalele unde nu avem sarcină distribuită, forța tăietoare este constantă iar momentul are o variație liniară (3-1-4 și 2-5).

e) în punctul 4 unde forța tăietoare nu are salt dar trece de la o valoare constantă la o variație liniară, diagrama de momente nu este „frântă”. Trecerea de la variația



liniară a momentului la variația parabolică se face fără ca tangenta la diagramă în punctul respectiv, fără ca momentul să aibă valori diferite la stânga și la dreapta punctului.

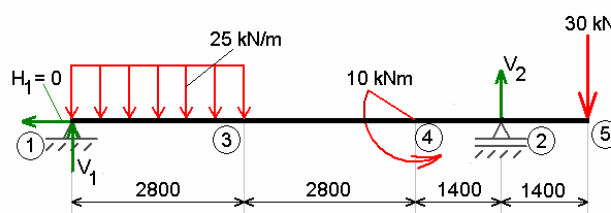
f) pe intervalul 4-5, în punctul unde forța tăietoare este zero, digrama de momente are o valoare extremă (maxim în acest caz deoarece  $T$ , care este derivata momentului, este pozitivă în stânga și apoi negativă).

g) momentul de încovoiere într-un capăt liber de bară (3 și 1) este întotdeauna zero.

**Aplicația 2.15.** Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara din figura 2.33.

**Rezolvare:**

Se eliberează bara de legături, prin introducerea forțelor corespunzătoare legăturilor barei. Articulația din punctul 1 va fi înlocuită prin două forțe  $V_1$  și respectiv  $H_1=0$ , iar reazemul simplu din punctul 2 prin forța  $V_2$ .



**Fig. 2.33**

Determinarea celor două necunoscute se realizează utilizând următoarele ecuații:

$$\sum M_2 = 0, \text{ pentru determinarea lui } V_1;$$

$$\sum M_1 = 0, \text{ pentru determinarea lui } V_2;$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 \times 7 - 25 \times 2,8 \times \left( \frac{2,8}{2} + 2,8 + 1,4 \right) - 10 + 30 \times 1,4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{25 \times 2,8 \times 5,6 + 10 - 30 \times 1,4}{7} = 51,43 \text{ kN};$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow 30 \times 8,4 - V_2 \times 7 - 10 + 25 \times 2,8 \times \frac{2,8}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{30 \times 8,4 - 10 + 25 \times 2,8 \times 1,4}{7} = 48,57 \text{ kN};$$

Verificarea reacțiunilor  $V_1$  și  $V_2$  se realizează prin utilizarea relației:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - 30 - 25 \times 2,8 = 51,43 + 48,57 - 30 - 70 = 0.$$

Se alege un sens de parcurgere al barei (sensul de măsurare a cotei  $x$ ), pentru a preciza poziția planului imaginar de secționare.

Se recomandă să se aleagă sensul de parcurs de la capătul barei spre interiorul ei. Se adoptă această modalitate de parcurgere a barei pentru a se obține relații de calcul a eforturilor cât mai simple. Și în cazul acestei aplicații, pentru început s-a ales ca sens de parcurs al barei sensul dinspre stânga spre dreapta (fig. 2.34).

Ca și în cazul aplicației anterioare, nici de această dată nu va exista diagrama de forțe axiale, deoarece nu există nicio sarcină exterior aplicată pe direcția axei barei.

Pentru intervalul 1-3  $x_1 \in [0; 2,8 \text{ m}]$  avem următoarele legi de variație a eforturilor:

$$T_{x_1} = V_1 - 25 \cdot x_1;$$

$$M_{x_1} = V_1 \cdot x_1 - 25 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2};$$

pentru:  $x_1 = 0$

$$T_1 = 51,43 \text{ kN};$$

$$M_1 = 0;$$

pentru:  $x_1 = 2,8 \text{ m}$

$$T_3 = -18,57 \text{ kN};$$

$$M_3 = 46 \text{ kNm};$$

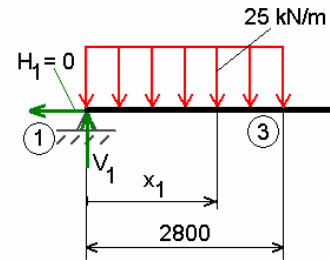


Fig. 2.34

**Observație:** Se observă că la extremitățile intervalului 1-3 forțele tăietoare au valori cu semne diferite, deci în acest interval există un punct în care forța tăietoare va avea valoarea zero. Trebuie determinată cu exactitate poziția acestui punct deoarece momentul încovoietor va avea un extrem în acest punct.

Dacă se notează coordonata acestui punct cu  $x_0$  vom avea:

$$T_{x_0} = 0 \Rightarrow V_1 - 25 \cdot x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{V_1}{25} = \frac{51,43}{25} = 2,057 \text{ m};$$

$$M_{x_0} = V_1 \cdot x_0 - 25 \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} \Rightarrow M_{x_0} = 51,43 \cdot 2,057 - 25 \cdot \frac{2,057^2}{2} \Rightarrow M_{x_0} = 52,9 \text{ kNm};$$

Pentru intervalul 3-4  $x_2 \in [0; 2,8 \text{ m}]$  (fig. 2.35), avem următoarele legi de variație a eforturilor:

$$T_{x_2} = V_1 - 25 \cdot 2,8;$$

$$M_{x_2} = V_1 \cdot (2,8 + x_2) - 25 \cdot 2,8 \cdot \left( \frac{2,8}{2} + x_2 \right);$$

pentru:  $x_2 = 0$

$$T_3 = -18,57 \text{ kN};$$

$$M_3 = 46 \text{ kNm};$$

pentru:  $x_2 = 2,8 \text{ m}$

$$T_4 = -18,57 \text{ kN};$$

$$M_{4st} = -6 \text{ kNm};$$

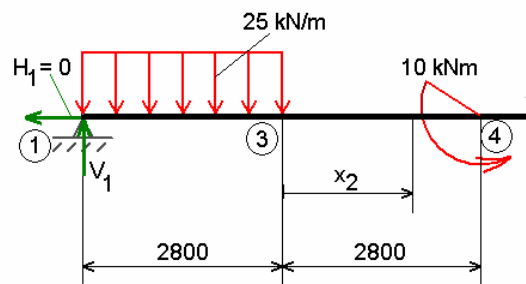


Fig. 2.35

**Observație:** S-a notat  $M_{4st}$  pentru că în punctul (4) se găsește un moment concentrat aplicat și ca atare momentul de încovoiere trebuie calculat atât la stânga și la dreapta punctului de aplicare a a acestei moment.

Pentru intervalul 4-2  $x_3 \in [0;1,4\text{ m}]$  (fig. 2.36), avem următoarele legi de variație a eforturilor:

$$T_{x_3} = V_1 - 25 \cdot 2,8;$$

$$M_{x_1} = V_1 \cdot (2,8 + 2,8 + x_3) - 25 \cdot 2,8 \cdot \left( \frac{2,8}{2} + 2,8 + x_3 \right) - 10;$$

pentru:  $x_3 = 0$

$$T_4 = -18,57 \text{ kN};$$

$$M_{4dr} = -16 \text{ kNm};$$

pentru:  $x_3 = 1,4\text{ m}$

$$T_{2st} = -18,57 \text{ kN};$$

$$M_2 = -42 \text{ kNm};$$

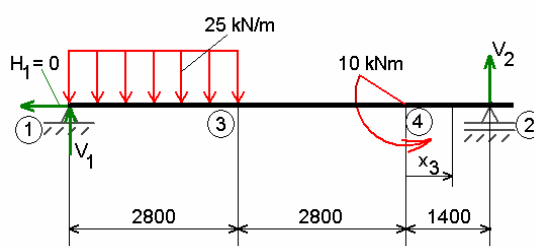


Fig. 2.36

**Observație:** S-a notat  $T_{2st}$  pentru că în punctul (2) se găsește o forță concentrată și ca atare forța tăietoare trebuie calculată la stânga și la dreapta punctului de aplicare a forței.

Ultimul interval al barei va fi parcurs de la dreapta la stânga, fiind mult mai ușor de scris legile de variație a eforturilor. Astfel pentru intervalul 5-2  $x_4 \in [0;1,4\text{ m}]$  (fig. 2.37), avem următoarele legi de variație a eforturilor:

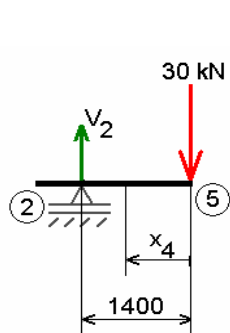


Fig. 2.37

$$T_{x_4} = 30;$$

$$M_{x_4} = -30 \cdot x_4;$$

pentru:  $x_4 = 0$

$$T_5 = 30 \text{ kN};$$

$$M_5 = 0 \text{ kNm};$$

pentru:  $x_4 = 1,4\text{ m}$

$$T_{2dr} = 30 \text{ kN};$$

$$M_2 = -42 \text{ kNm};$$

Cu valorile astfel calculate se trasează diagramele de eforturi. Aceste diagrame sunt prezentate în fig. 2.38

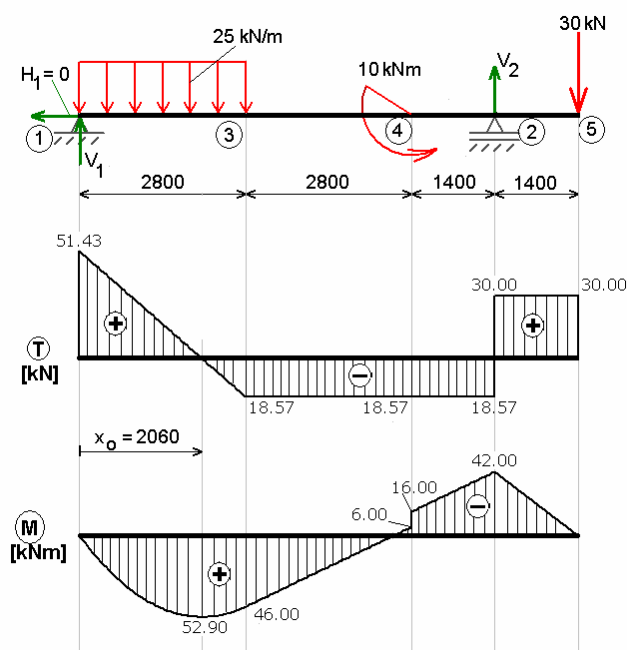


Fig. 2.38

## 2.8. Întrebări – test

1. În ce constă metoda secțiunilor? Câte eforturi secționale cunoașteți?
2. Ce este o solicitare simplă? Dar o solicitare compusă? Dați exemple de diferite solicitări și specificați din ce categorie fac parte.
3. Ce este torsiunea? Ce este încovoierea pură? Care este deosebirea între tracțiune și compresiune?
4. Care este diferența dintre eforturi și tensiune?
5. Ce relații există între eforturile secționale și sarcini? Scrieți aceste relații pentru cazul barelor drepte și a barelor curbe.
6. Care este convenția de semne pentru eforturile secționale?
7. Ce sunt diagramele  $N$ ,  $T$ ,  $M_i$ , și  $M_t$ ? Cum se construiesc aceste diagrame?
8. Enumerați zece reguli utilizate la trasarea diagramelor de eforturi  $N$ ,  $T$ ,  $M_i$ , și  $M_t$ .
9. Unde  $M_i$  este maxim? Dar minim?
10. Care din următoarele afirmații sunt corecte?
  - a. Dacă  $T < 0$ ,  $M_i$  crește;
  - b. Dacă  $T = 0$ ,  $M_i$  scade;
  - c.  $T > 0$ ,  $M_i$  este maxim;
  - d.  $T > 0$ ,  $M_i$  crește;
  - e. Dacă  $T = 0$  pe zona A-B,  $M_i$  este constant pe această zonă;
  - f. Dacă  $p_y = 0$ ,  $T$  este maxim;
  - g. Dacă  $p_y$  este constant,  $T$  este constant;
  - h. Dacă  $p_y = k_1x + k_2$ , atunci  $T = k_1x^3 + k_2x^2 + c_1x$  ?
11. Definiți  $N$  și  $T$  la barele curbe.
12. Într-o articulație lipsită de momente concentrat aplicate, care din următoarele afirmații adevărată?
  - a.  $M_i > 0$ ;
  - b.  $M_i < 0$ ;
  - c.  $M_i = 0$ ?
13. Care sunt etapele de lucru la trasarea diagramelor de eforturi  $N$ ,  $T$ ,  $M_i$ , și  $M_t$ .
14. Ce se înțelege prin moment maxim maximorum și cum se calculează?
15. Când în dreptul unei forțe momentul de încovoiere este maxim?
16. Ce este un efort secțional? Ce eforturi secționale cunoașteți?
17. Ce sunt sarcinile exterioare? Care sunt criteriile de clasificare a acestor sarcini?
18. Care sunt unitățile de măsură pentru următoarele mărimi:

- a. forță concentrat aplicată;
  - b. sarcină distribuită;
  - c. moment concentrat aplicat;
  - d. moment distribuit;
  - e. sarcină distribuită pe o lungime;
  - f. sarcină distribuită pe o suprafață.
19. Clasificați sarcinile dinamice.
  20. Ce se înțelege prin eforturi?
  21. În ce constă metoda secțiunilor? Care sunt eforturile secționale pe care le cunoașteți?
  22. Scrieți relația diferențială între sarcini și eforturi pentru cazul barelor plane. Comentarii.
  23. Care sunt etapele de calcul ce trebuiesc urmate pentru trasarea diagramelor de eforturi?

## 2.9. Probleme propuse

1. Să se traseze diagramele de eforturi și să se precizeze secțiunea periculoasă pentru berele din figura 2.39.

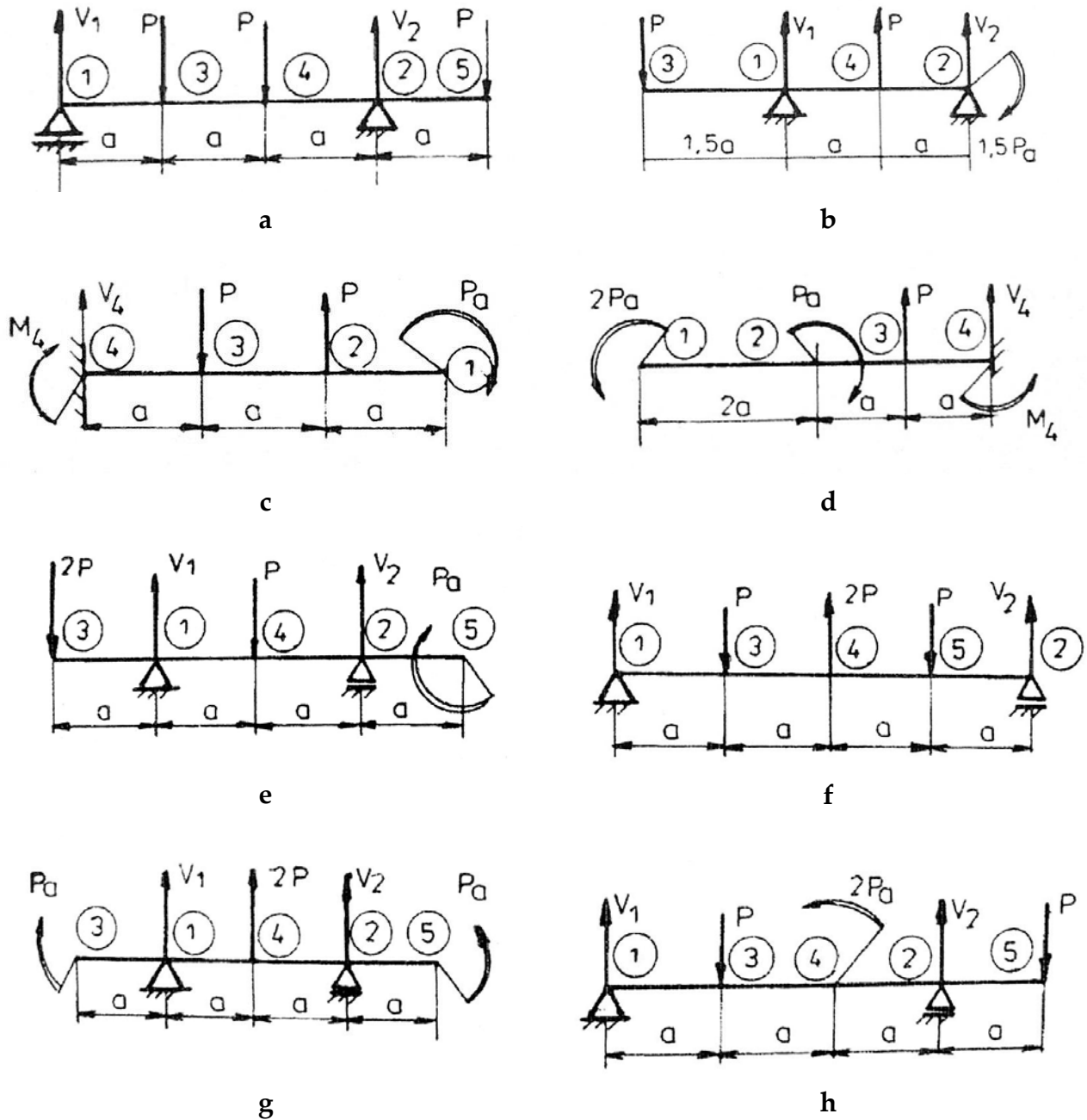


Fig. 2.39

2. Să se traseze diagramele de eforturi și să se precizeze secțiunea periculoasă pentru barele din figura 2.40.

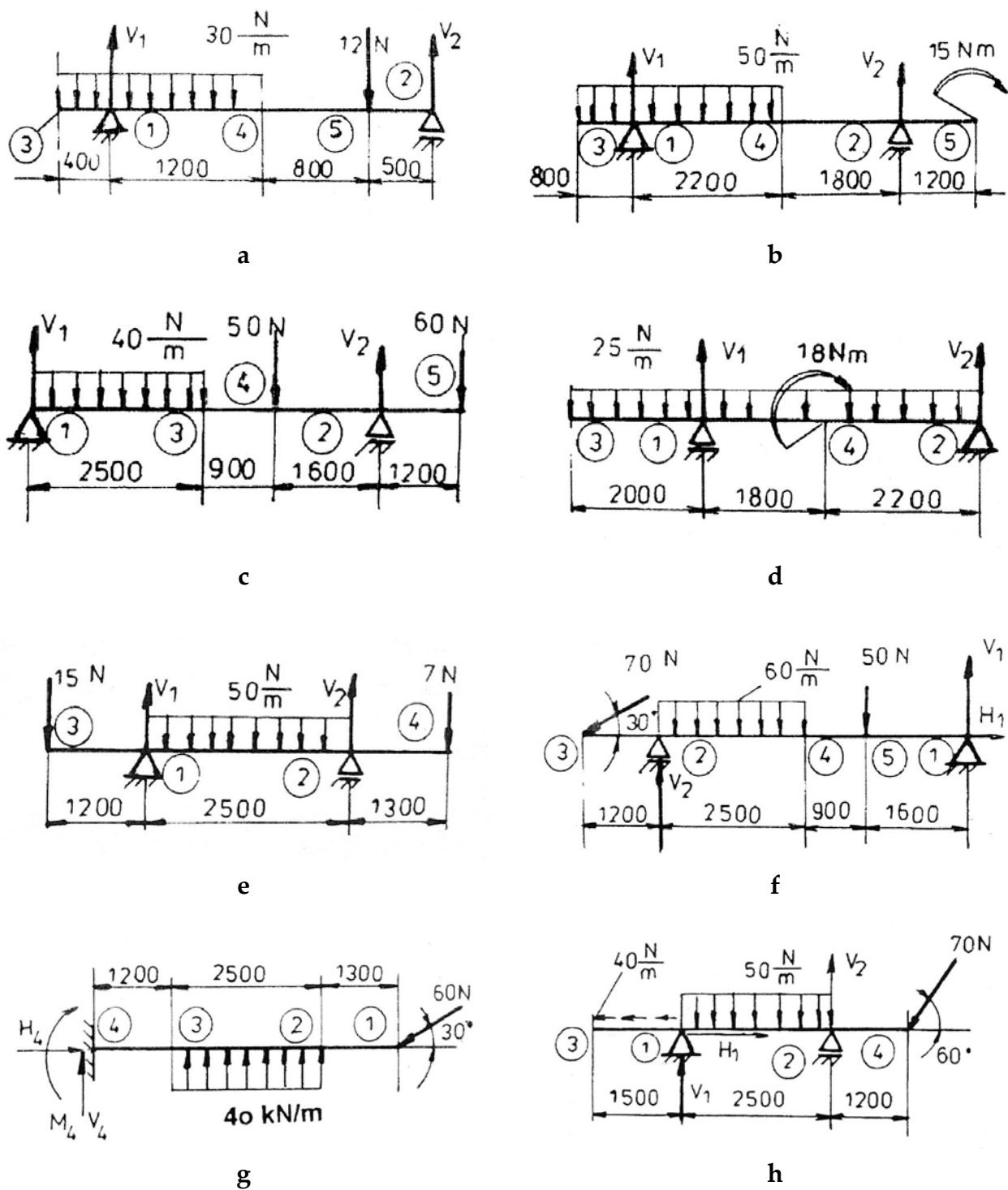


Fig. 2.40





# 3. COMPORTAREA MECANICĂ A ELEMENTELOR DE REZISTENȚĂ

## 3.1. Tensiuni

Dacă un ER este supus acțiunii unor forțe exterioare în interiorul acestuia vor apărea forțe de atracție sau de respingere suplimentare care au tendința de a păstra forma sa inițială. Dacă aceste forțe nu ar exista ER nu ar fi capabil să suporte încărcările exterioare.

Să considerăm o bară, în echilibru, acționată de un sistem de forțe exterioare ( $F_1, F_2, \dots, F_N$ ) (fig. 3.1,a).

Forțele exterioare au tendința de a modifica forma barei iar forțele interioare se opun deformației barei.

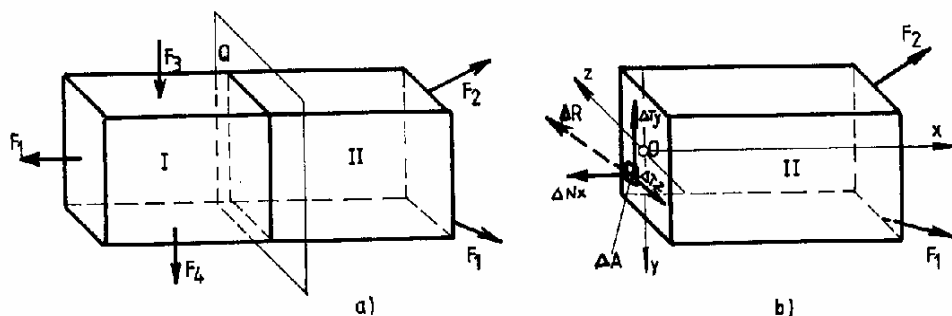


Fig. 3.1

Să presupunem că am secționat bara cu un plan Q normal pe axa barei ( $Ox$ ). Pe fiecare element de suprafață  $\Delta A_x$  de pe suprafața de separație, va acționa câte o forță interioară  $\Delta R$ . Toate forțele  $\Delta R$  de pe întreaga suprafață de separație, mențin părțile I și II împreună cu planul Q. Forța interioară  $\Delta R$  poate fi descompusă în trei componente paralele cu axele  $Ox, Oy$  și  $Oz$ : respectiv  $\Delta N_x, \Delta T_y, \Delta T_z$ .

Mărimea forței interioare  $\Delta R$  poate fi diferită pe suprafață și să depindă de poziția ariei  $\Delta A$ . Intensitatea forței pe elementul de arie  $\Delta A$  este egală cu raportul  $\frac{\Delta R}{\Delta A}$ .

Dacă reducem aria finită  $\Delta A$  la o arie infinitezimală din jurul unui punct, se obține o nouă mărime de intensitate numită **tensiune**. Astfel se obține **tensiunea normală**  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N_x}{\Delta A} = \frac{dN_x}{dA}, \quad (3.1,a)$$

și corespunzător **tensiunile tangențiale**:

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T_y}{\Delta A} = \frac{dT_y}{dA}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T_z}{\Delta A} = \frac{dT_z}{dA}. \quad (3.1,b)$$

Tensiunile normale sunt **pozitive**, dacă produc întindere și **negative**, dacă produc compresiune.

Tensiunile tangențiale sunt produse de forțele conținute în planul Q al secțiunii. **Acestea se consideră pozitive când rotesc elementul de volum în sens orar, și respectiv negative când rotesc antiorar.**

Tensiunile se măsoară în unități de forță pe unitate de arie Pa, MPa, GPa, N/mm<sup>2</sup>, kN/mm<sup>2</sup>, etc.

Mărimile  $\sigma$  și  $\tau$  **nu sunt vectori** (deoarece ele se obțin din raportarea unor forțe elementare la o suprafață elementară), ci sunt **mărimi tensoriale** și ca atare, trebuie avut grijă să li se aplice regulile de operare specifice tensorilor.

**Tensiunile normale se notează cu un singur indice - cel al axei normale la secțiune, iar tensiunile tangențiale cu doi indici: primul indice arată axa normală la secțiune iar al doilea, axa paralelă cu tensiunea.**

## 3.2. Tensiuni pe un element de volum

Dacă decupăm din bară (fig.3.1) un element infinitezimal cu ajutorul unor plane imaginare paralele cu planurile zOy, zOx, xOy, ce au distanțele între ele dx, dy, dz, se obține un paralelipiped elementar (fig.3.2,a).

**Acesta se consideră că reprezintă un punct din ER.** Pe fața din stânga a acestui element vor acționa tensiunile  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  și  $\tau_{yz}$  determinate cu relațiile (3.1). Forțele elementare de pe această față sunt:

$$dN_x = \sigma_x \cdot dA = \sigma_x \cdot dy \cdot dz,$$

$$dT_y = \tau_{xy} \cdot dA = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz,$$

$$dT_z = \tau_{xz} \cdot dA = \tau_{xz} \cdot dy \cdot dz.$$

Pentru analiza stării de tensiune adoptăm ipoteza: **forțele elementare ce acționează pe cele două arii elementare, ale unui element infinit mic, paralele între ele, sunt egale și de sens contrar**, adică dacă pe fața din stânga elementului există forțele elementare  $\sigma_x \cdot dA$ ,  $\tau_{xy} \cdot dA$  și  $\tau_{xz} \cdot dA$  atunci și pe fața din dreapta elementului, de aceeași arie dA, vor acționa aceleași forțe elementare  $\sigma_x \cdot dA$ ,  $\tau_{xy} \cdot dA$  și  $\tau_{xz} \cdot dA$  de sens contrar. **Atunci rezultă că pe fețele elementului infinitezimal de volum vor acționa tensiunile ca în figura (3.2,b).**

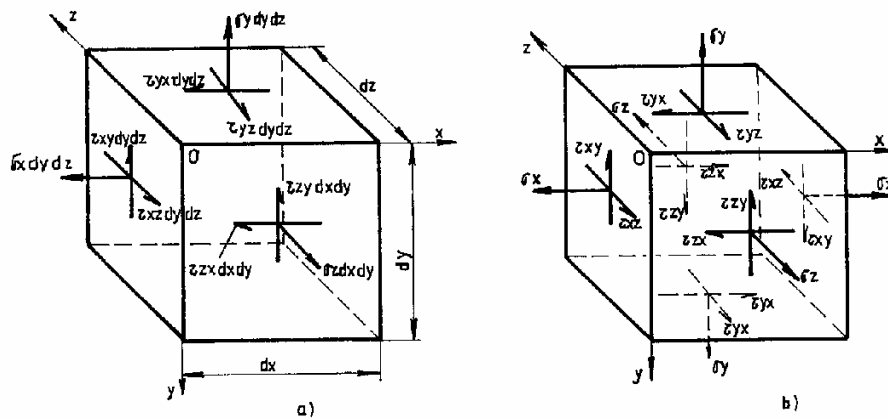


Fig. 3.2

Cele 9 componente:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$  caracterizează în întregime starea de tensiune în jurul unui punct O. Acestea sunt mărimi tensoriale (diferite de mărimile scalare și vectoriale) și se reprezintă prin **tensorul tensiune**.

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

Tensorul tensiune este un tensor de ordinul doi, ce conține, pe cele 6 fețe ale elementului de volum, cele 9 componente menționate mai sus. Pe fiecare față a elementului de volum se află câte o componentă  $\sigma$ , paralelă cu axa normală la față și câte două componente  $\tau$ , conținute în planul secțiunii și paralele cu cele două axe ale secțiunii.

Elementul infinitezimal sub acțiunea forțelor elementare este în echilibru și de aceea forțele normale trebuie să fie două câte două coliniare egale în mărime și de sens contrar, iar sistemul de forțe tangențiale trebuie să fie de asemenea în echilibru. Astfel, forțele tangențiale trebuie să fie egale, în mărime și de sens opus, două câte două iar momentul față de centrul elementului să fie nul:

$$2 \cdot \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} - 2 \cdot \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0.$$

Prin simplificare cu  $dx \cdot dy \cdot dz$  va rezulta:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Dacă punem condiții similare și pentru tensiunile de pe celelalte fețe paralele între ele, din figura (3.2,b) se obțin relațiile:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \text{și} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (3.3)$$

Aceste relații reprezintă **dualitatea tensiunilor tangențiale** și precizează că: **pe fețele perpendiculare ale unui element infinitezimal pot exista simultan tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$  și  $\tau_{yx}$** . Acestea sunt conținute în planuri ce corespund fețelor

elementului de volum și produc două câte două cupluri egale în mărime și de sens opus. De aceea ele trebuie să fie simetrice față de muchia comună a celor două fețe. Din relațiile (3.3) rezultă că din cele 9 componente ale tensorului (3.2) numai 6 sunt distincte și deci **tensorul tensiune este simetric față de diagonala principală**.

### 3.3. Starea plană de tensiune

În multe din problemele ingineresti se întâlnește cazul particular al stării generale de tensiune, când ER este încărcat cu forțe coplanare în echilibru, și în acest caz pe suprafața liberă de sarcini, nu există sarcini normale și paralele cu acestea. De asemenea, ținând seama de condiția de echilibru, pe o față paralelă cu prima și aflată la distanță infinit mică ( $dz$ ), forțele vor fi nule. În acest caz toate forțele sunt coplanare și starea de tensiune corespunzătoare se numește **stare plană de tensiune** (fig. 3.3,a) și ea poate fi reprezentată simplificat ca în figura (3.3,b)

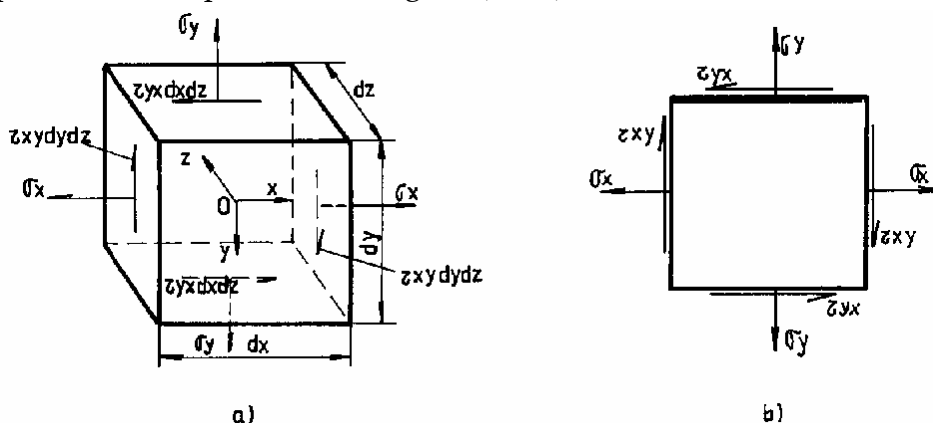


Fig. 3.3

### 3.4. Deformații și deplasări

Starea de tensiune s-a analizat ca efect al forțelor interioare și în mod similar se va analiza modificarea dimensiunilor.

Prin **deformație** se înțelege **modificarea dimensiunii ER**. Modificarea lungimii se numește **lungire**, când ER este întins și respectiv **scurtare**, când acesta este comprimat. Lungirile și respectiv scurtările se notează cu  $\Delta l$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , etc.

Prin **deformație unghiulară** se înțelege modificarea unghiurilor (drepte) și se notează cu  $\Delta\varphi$ ;  $\Delta\theta$ , etc.

Pentru a simplifica și evidenția mai clar studiul deformațiilor, să considerăm un element plan OABC decupat dintr-un ER solicitat plan. Starea plană de tensiune poate fi considerată ca fiind suprapunerea a trei stări de tensiune: două stări de tensiune normală (fig.3.4,b și c) și una de forfecare pură (fig.3.4,d). Fiecare din aceste stări de tensiune produc, deformații caracteristice.

Starea de tensiune din figura (3.4,b) modifică lungimea elementului, astfel că elementul cu dimensiunile inițiale (linie întreruptă) se schimbă și ia forma elementului reprezentat cu linie groasă. Aceste schimbări sunt **deformații liniare**,  $\Delta'x$  și  $\Delta'y$  (deformațiile liniare se măsoară în mm sau  $\mu\text{m}$ ), unde  $\Delta'x$  este o alungire, iar  $\Delta'y$  o contracție.

Similar se deformează elementul pentru starea de tensiune din figura (3.4,c), cu lungirea  $\Delta''y$  și contracția  $\Delta''x$ .

Deoarece deformațiile liniare nu pot caracteriza bine deformațiile unui ER, pentru că depind de dimensiunile acestuia se utilizează noțiunile de **deformații specifice**.

Se definește **deformație specifică liniară** pe o direcție raportul dintre alungirea (scurtarea) elementului și lungimea inițială a acestuia pe direcția respectivă. Pentru elementele din figura (3.4,b,c) se obțin următoarele **alungiri specifice**:

$$\varepsilon'_x = \frac{\Delta'x}{dx} \quad \text{și} \quad \varepsilon''_y = \frac{\Delta''y}{dy}, \quad (3.4,a)$$

și **scurtări (contractii) specifice**:

$$\varepsilon'_y = \frac{\Delta'y}{dy} \quad \text{și} \quad \varepsilon''_x = \frac{\Delta''x}{dx} \quad (3.4,b)$$

**Tensiunile tangențiale deformează elementul ca în figura (3.4,c).** Sub acțiunea tensiunilor tangențiale elementul își modifică numai unghiul drept dar lungimile laturilor rămân aceleași. Modificarea unghiului drept se notează cu  $\gamma_{xy}$ . Deoarece unghiul  $\gamma_{xy}$  este foarte mic, **deformația specifică unghiulară**, se poate defini astfel:

$$\gamma_{xy} \approx \text{tg} \gamma_{xy} = \frac{\Delta l}{dx}, \quad (3.4)$$

și se numește **lunecare specifică**.

**Deformațiile specifice liniare și cele unghiulare sunt adimensionale.** În lucrările tehnice de specialitate lungirile specifice se dau în  $\mu\text{m}/\text{m}$  sau în %, iar lunecările specifice pot fi exprimate în  $\mu\text{m}/\text{m}$  sau în radiani.

Deformațiile specifice sunt tensori ca și tensiunile.

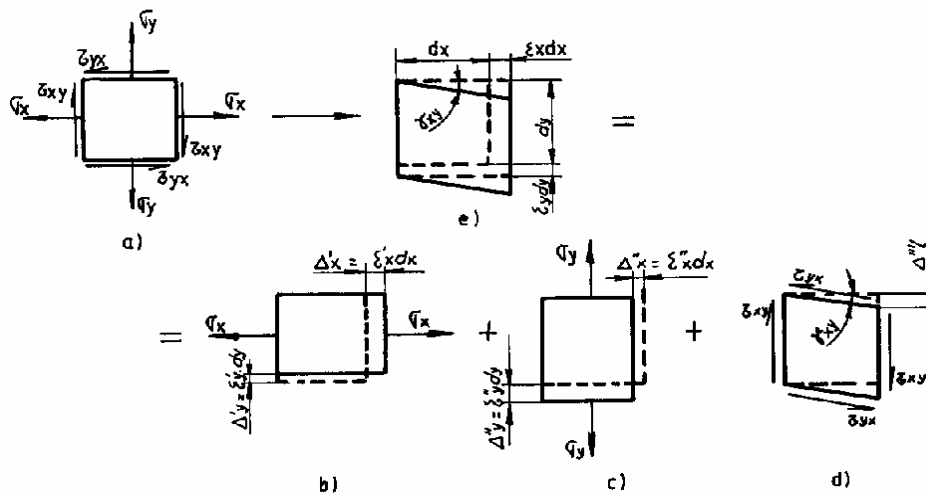


Fig. 3.4

Drumul parcurs de un punct al ER de la poziția sa inițială corespunzătoare unui ER neîncărcat la poziția finală, după solicitare se numește deplasare. Deplasările sunt mărimi vectoriale.

Deplasarea, în mod uzual, poate rezulta din următoarele patru tipuri generale:

- a) translația întregului ER;
- b) rotația întregului ER;
- c) schimbarea dimensiunilor ER;
- d) modificarea unghiurilor ER.

Primele două deplasări sunt deplasări ale rigidului, iar ultimele două tipuri sunt cauzate de deformația ER. Deplasările rigidului s-au studiat la cinematică. În Rezistența materialelor se vor studia numai deplasările produse prin deformarea ER.

### 3.5. Măsurarea deformațiilor

Tensiunile și deformațiile specifice sunt mărimi abstracte și ca atare este imposibil, din punct de vedere fizic, să fie măsurate. Se pot, însă, măsura deformații finite.

**Deformațiile finite** se pot măsura pentru **lungimi finite** de pe suprafața (ER). Dacă deformația se măsoară pe o lungime relativ mică, se poate evalua o deformație medie pe unitatea de lungime care poate fi luată ca o **valoare aproximativă a deformației specifice într-un punct de măsură**. Pe această bază **lungirea specifică** poate fi aproximată cu raportul dintre lungirea (scurtarea) măsurată pe o mică lungime la lungimea respectivă.

Deformațiile unghiulare sunt mult mai dificil de măsurat; acestea au valori foarte mici și trebuie măsurate pe un element cât mai mic de pe suprafața ER.

Pentru măsurarea lungirilor specifice există mai multe metode (mecanice, optice, electrice).

În problemele de Rezistența materialelor se cer determinarea deformațiilor specifice după direcțiile principale. La piesele simple și supuse la solicitări simple se cunosc direcțiile principale și în astfel de cazuri se măsoară deformațiile specifice după aceste direcții.

Sunt însă foarte multe cazuri în care nu se cunosc nici direcțiile principale și nici deformațiile specifice principale. Pentru aceste cazuri se măsoară lungirile (scurtările) după trei direcții ceea ce conduce la eliminarea măsurării lunecării specifice,  $\gamma_{xy'}$ , care este mai dificil de măsurat.

La început s-au măsurat lungirile cu ajutorul extensometrelor mecanice, apoi s-a utilizat amplificarea optică pentru a se ușura citirea cu ochiul liber a deformațiilor mici. În prezent se folosesc traductoare, care utilizează pentru măsurarea deformației variația rezistenței, a inductanței, a capacității, a efectului piezoelectric, etc.

Pentru măsurarea deformației specifice pe trei direcții într-un punct se utilizează un grup de traductoare montate pe același suport. Cele mai larg răspândite sunt cele la care unghiurile  $\alpha'$ ,  $\beta'$  și  $\gamma'$  (fig. 3.5,a și b) sunt multiplu de  $15^\circ$  și ele pot fi aranjate în **rozete delta** (fig. 3.5,b) cu  $\alpha'=\beta'=\gamma'=60^\circ$  sau **rozete în evantai** (fig. 3.5,a) cu  $\alpha'=\beta'=\gamma'=120^\circ$ . De asemenea se mai utilizează des rozeta în evantai cu  $\alpha'=\beta'=135^\circ$  și  $\gamma'=90^\circ$ .

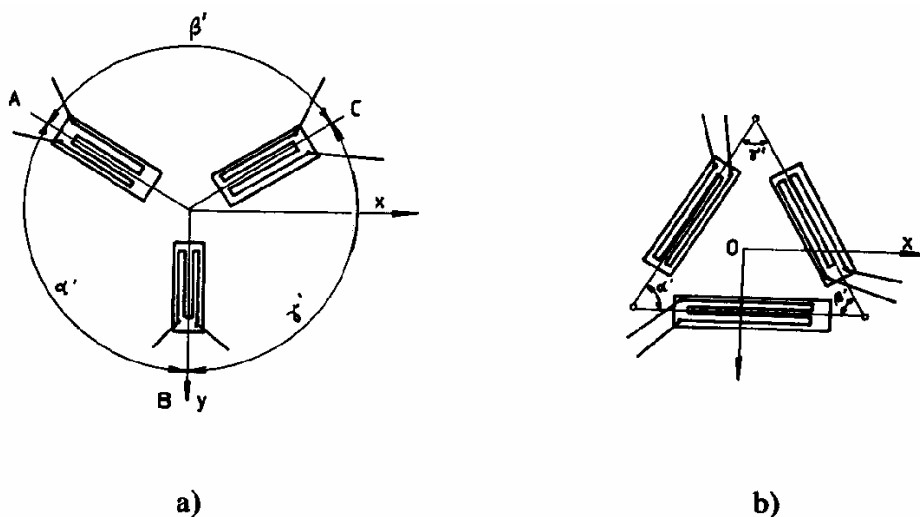


Fig. 3.5

Analiza stării de deformație, pe baza deformațiilor determinate cu ajutorul unei rozete se poate face pe cale analitică sau grafică.

## 3.6. Aspectul fizic

Analiza tensiunilor, respectiv a deformațiilor s-a studiat separat, independent una de alta și fără a se ține seama de caracteristicile fizico-mecanice ale materialului din care este confecționat ER. În realitate, însă, tensiunile și deformațiile depind una de alta și interdependența este în funcție directă de proprietățile fizico-mecanice ale materialului ER.

În rezistența materialelor se analizează starea de tensiune și respectiv starea de deformație a corpurilor în echilibru. Echilibrul în rezistența materialelor, numit **echilibru static**, diferă de echilibrul din mecanică care presupune accelerație nulă. ER sub acțiunea forțelor, în echilibru, se deformează și deci **unele părți ale sale se vor mișca față de altele**. Mișcarea va fi accelerată până ce se atinge o anumită deformație. **Procesul de deformație va lua sfârșit când forțele interne, cauzate de deformație, ajung să fie suficient de mari pentru a echilibra acțiunea forțelor exterioare**. Când acest stadiu este atins ER va fi din nou în echilibru. **Dacă forțele interioare nu vor putea fi atât de mari încât să oprească deformațiile, ER se va rupe**.

**Încărcarea se numește statică dacă forțele sunt astfel aplicate încât creșterea deformațiilor este mică și se poate presupune că efectul accelerației este neglijabil pe durata procesului de deformare**. Un asemenea proces se numește **proces cvasi-static**. În cele ce urmează se va înțelege prin **încărcare statică**, procesul cvasi-static produs de sarcini.

**Aspectul fizic în rezistența materialelor reprezintă relațiile de legătură între tensiuni și deformații**. Aceste relații precum și proprietățile fizico-mecanice ale materialelor se stabilesc pe cale experimentală (prin încercări mecanice).

## 3.7. Încercarea la tracțiune

### 3.7.1. Epruveta

Legătura dintre tensiuni și deformații se poate stabili, mai simplu și convenabil, pe un ER lung în care există o stare uniaxială de tensiune. Pentru aceasta se consideră o epruvetă (fig.3.6) acționată axial, la cele două capete, de forțele  $F$  (fig. 3.6,a).

Starea uniaxială de tensiune se observă pe elementul de volum, decupat din bară (fig. 3.6,c).



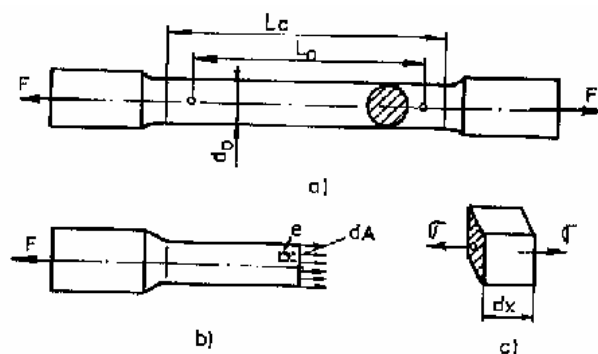


Fig. 3.6

Ecuția de echilibru pentru partea din stânga a epruvetei (fig. 3.6,b) este:

$$F - \int_A \sigma \cdot dA = 0.$$

Acceptând ipoteza că tensiunile normale sunt uniform distribuite pe întreaga secțiune ( $\sigma = ct.$ ) din ecuația de echilibru de mai sus se obține  $F = \sigma \cdot A_0$ , din care rezultă:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}. \quad (3.5)$$

Încercarea la tracțiune a metalelor se poate efectua pe o epruvetă cilindrică din oțel ca cea din figura (3.6,a), conform SR EN 10002-1; 1994. Aceasta are același diametru pe **lungimea calibrată**  $L_c$ . Pe această lungime se marchează două repere la distanța  $L_0$ , numită **lungimea între repere**. **Lungimea epruvetei** se consideră ca fiind lungimea între repere  $L_0$ .

Alungirea elementului  $dx$  este:

$$\Delta dx = \varepsilon \cdot dx,$$

iar alungirea epruvetei (între cele două repere) va fi:

$$L = \int_0^{L_0} \Delta dx = \int_0^{L_0} \varepsilon \cdot dx.$$

Acceptând ipoteza că lungimea specifică este aceeași pe toată lungimea calibrată ( $\varepsilon = ct.$ ), din relația de mai sus se obține:

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L_0; \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}. \quad (3.6)$$

### 3.7.2. Mașina de încercări mecanice și aparate de măsură

Capetele epruvetelor au diverse forme, alese corespunzător dispozitivelor de fixare ale **mașinii de încercat**. Mașina de încercat este o presă specială ce asigură creșterea lentă a forței axiale  $F$  și măsurarea precisă a valorii acesteia în condiții de viteză de încărcare prescrisă.

Alungirea epruvetei (între repere) se măsoară, cu un aparat numit **extensometru**, concomitent cu măsurarea forței axiale. Extensometrul se fixează pe epruvetă prin două perechi de cuțite de fixare: o pereche fixă și cealaltă mobilă. Acestea se prind pe epruvetă în dreptul reperelor (la distanța  $L_0$ ).

### 3.7.3. Diagrama încercării la tracțiune

În timpul creșterii sarcinii se citesc, simultan, valorile intermitente ale sarcinii, respectiv ale alungirii. Multe laboratoare dispun de instalații ce înregistrează diagrama forță - alungire. **Diagrama încercării la tracțiune**  $F = f(\Delta l)$ , înregistrată de către aparatură sau reprezentată pe baza măsurărilor, pentru oțel moale, are forma din figura (3.7,a). Pentru a obține diagrama  $\sigma = f(\epsilon)$ , se utilizează relațiile (3.5) și (3.6); se împarte sarcina  $F$  la **aria inițială**  $A_0$  și respectiv alungirea  $\Delta L$  la **lungimea inițială**  $L_0$ . Reprezentând grafic datele obținute, în sistemul de axe; abscisă-**alungirile specifice**  $\epsilon$  și ordonată - **tensiunile**  $\sigma$ , se obține **curba caracteristică a materialului**. Pentru oțel, aceasta arată ca în figura (3.7,b).

Pentru calculul de rezistență prezintă interes o parte din curba caracteristică și anume OPECC'A.

## 3.8. Caracteristicile elastice și mecanice ale materialelor

Curba caracteristică are o serie de puncte deosebite, numite limite, ce definesc următoarele mărimi caracteristice:

a) **Limita de proporționalitate**, marcată pe curbă de punctul P, este tensiunea maximă până la care există **liniaritate între tensiuni și deformații** ( $\sigma_p = \frac{F_p}{A_0}$ ). **Ecuția**

**zonei de proporționalitate** (a porțiunii OP) este:

$$\sigma = E \cdot \epsilon, \quad (3.7)$$

și se numește **Legea lui Hooke**. Aceasta arată că, **până la limita de proporționalitate alungirile specifice sunt proporționale cu tensiunile**.

Caracteristica  $E$  se numește **modul de elasticitate longitudinal** (modulul lui Young). Fiecare material are o valoare unică a acestei caracteristici, ce este o **măsură a rigidității materialului** respectiv. Astfel oțelurile, indiferent de calitatea acestora, au în medie;  $E_{OL} \cong 210$  GPa, iar aluminiul  $E_{AL} \cong 75$  GPa.

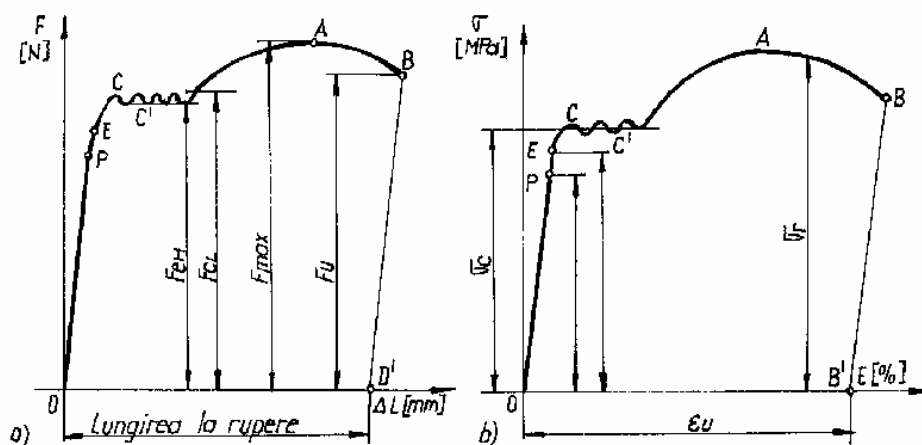


Fig. 3.7

Valorile modulelor de elasticitate și ale caracteristicilor elastice pentru diferite materiale sunt date, în tabele (vezi anexa 2).

Numai două materiale au curba caracteristică cu zonă de proporționalitate, **oțelul și lemnul**. Acestea **ascultă de legea lui Hooke**. Celelalte materiale au caracteristici curbilini. Deoarece este util să se utilizeze legea lui Hooke și la aceste materiale, prin SR EN 10002-1,2; 1994, se definesc termeni specifici pentru modulul de elasticitate.

Aici se vor defini numai:

**b) Modulul de elasticitate convențional liniar**, care este raportul dintre tensiune și alungirea specifică corespunzătoare, la metalele care prezintă o porțiune elastică liniară a curbei caracteristice de tracțiune;

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (3.8)$$

Pentru alte materiale este necesar să se consulte SR EN 10002-1,2; 1994.

**c) Limita de elasticitate**, marcată pe curba caracteristică prin punctul E (fig.3.7,b), este valoarea tensiunii maxime, până la care materialul este perfect elastic:

$$\sigma_e = \frac{F_E}{A_0}. \quad (3.9)$$

Experiențele au arătat că nu există nici un material perfect elastic, adică după descărcarea de forță nu revine la lungimea inițială. Toate materialele, **chiar la o solicitare relativ mică, prezintă, o deformație permanentă**. Valoarea acestei deformații depinde de mărimea sarcinii aplicate.

**d) Limita de curgere (aparentă)**, marcată pe curba caracteristică prin punctul C (fig.3.7,b) și este valoarea tensiunii la care alungirea crește cu toate că sarcina se păstrează aproape constantă (fig.3.7,b):

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A_0}. \quad (3.10)$$

În SR EN 10002-1; 1994 limita de curgere se notează și cu  $R_c$ .

După atingerea limitei de curgere epruveta continuă să se deformeze plastic, fără creșterea tensiunii. Curba caracteristică are un traseu oscilant, între **limita de curgere superioară  $\sigma_{cs}$  și limita de curgere inferioară  $\sigma_{ci}$** . Valoarea medie a oscilațiilor se poate aproxima printr-o dreaptă, ce se numește **palier de curgere CC'** (fig.3.7). Deformația plastică ce se produce pentru palierul de curgere (CC') este, la oțel moale, de 20...50 ori mai mare decât la cea elastică (abscisa punctului E).

Deformația plastică din perioada curgerii apare ca urmare a lunecării relative între faliile formate și înclinate la  $45^\circ$  față de axa epruvetei, fără slăbirea coeziunii dintre falii.

Din această cauză, la atingerea limitei de curgere, apar linii fine înclinate, de culoare mai închisă, la  $45^\circ$  față de axa epruvetei, numite **linii Lüders - Cernov**. Liniile se înmulțesc formând benzi, care se lățesc progresiv până ce cuprind toată porțiunea calibrată a epruvetei. Liniile reprezintă urmele planelor de lunecare a materialului, în care tensiunile tangențiale sunt maxime ( $\tau_{max} = \sigma_c/2$ ).

După ce liniile Lüders au acoperit întreaga porțiune calibrată a epruvetei tensiunea începe să crească împreună cu deformația. Pe curba caracteristică, această porțiune este reprezentată de curba CA (fig.3.7) și este numită **zonă de întărire**.

Dacă dintr-un punct de pe această zonă, în loc să se continue încărcarea, se descarcă lent din punctul M, în cursul descărcării se obține o relație liniară între  $\sigma$  și  $\epsilon$ . Porțiunea MO' este o dreaptă paralelă cu OP (fig.3.7,b). La reîncărcarea epruvetei se parcurge dreapta O'M, astfel că materialul se comportă elastic până în punctul M. Deci, punctul M reprezintă o nouă limită de elasticitate a materialului, superioară celei determinate la început. Această operație, de mărire a limitelor  $\sigma_p = \sigma_E = \sigma_c = \sigma_M$  se numește **ecruisare**.

**e) Rezistența la rupere** a materialului, marcată pe curba caracteristică prin punctul A (fig. 3.7,b) este valarea maximă a tensiunii și se notează cu  $\sigma_r$  ( $R_m$  în SR EN 10002-1; 1994)

$$\sigma_r = \sigma_{max} = \frac{F_{max}}{A_0},$$

unde:

$$A_0 = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} \text{ este aria secțiunii inițiale.}$$

f) La epruvetele confecționate din oțel moale (tenace) când sarcina se apropie de valoarea  $F_{max}$ , se produce **gâtuirea epruvetei**. În locul de gâtuire secțiunea scade până când se produce ruperea bruscă, cu zgomot (fig.4.3).

După apariția gâtuirii, sarcina  $F$  aplicată epruvetei scade, ceea ce este reprezentat pe curba caracteristică prin zona AB (fig.3.7).



Fig. 3.8

Măsurând diametrul epruvetei la o încărcare oarecare de pe porțiunea AB (după apariția gâtuirii) și calculând aria corespunzătoare se poate determina **gâtuirea specifică**.

$$\psi = \frac{A_0 - A}{A_0} \quad (3.11,a)$$

Pentru o epruvetă ruptă **gâtuirea** la rupere este;

$$Z = \frac{A_0 - A_u}{A_0} \cdot 100[\%] \quad (3.11,b)$$

unde:

$$A_u = \frac{\pi \cdot d_u^2}{4} \text{ - este aria secțiunii de rupere.}$$

g) Așezând cele două bucăți ale epruvetei rupte, cap la cap, se poate măsura **lungirea ultimă între repere**,  $L_u$  și se poate determina **alungirea specifică la rupere** (conform SR EN 10002-1; 1994);

$$A_r = \varepsilon_r = \frac{L_u - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L_u}{L_0} \quad (3.12)$$

h) Experimental s-a evidențiat că o dată cu alungirea unei bare (epruvete) apare o micșorare a secțiunii numită **contractie transversală**. S-a constatat că pentru domeniul liniar-elastic această contractie este proporțională cu alungirea specifică. Ca atare la o alungire specifică a epruvetei cu  $\varepsilon_x$  corespunde o contractie transversală proporțională cu alungirea  $\varepsilon_x$ :

$$\varepsilon_{tr} = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x,$$

unde:

$\nu$  - este **coeficientul de contractie transversală** sau **coeficientul lui Poisson**.

Coeficientul lui Poisson este o constantă elastică de material. Valoarea acestuia este cuprinsă între 0,16 și 0,42 și este dată în tabele. Dacă deformația este plastică, corpul nu-și modifică volumul și  $\nu = 0,5$ .

Mărimile; **limita de curgere ( $\sigma_c$ )**, **rezistența la rupere ( $\sigma_r$ )**, **alungirea la rupere ( $\varepsilon_r$ )**, și **gâtuirea la rupere (Z)** se numesc **caracteristici mecanice ale materialului**.

Constantele; **modulul de elasticitate longitudinal (E), coeficientul de contracție transversală (ν), limita de proporționalitate (σ<sub>p</sub>), limita de elasticitate (σ<sub>e</sub>) se numesc caracteristici elastice ale materialului.**

Cunoașterea acestora are o importanță deosebită pentru folosirea corectă a materialelor în calculul de rezistență.

Pentru OL 37 caracteristicile mecanice și elastice, după STAS 1500-75, sunt;

$$\begin{array}{ll} \sigma_r = 370...450\text{MPa} & E = 210\text{GPa} \\ \sigma_c = 210...240\text{MPa} & \nu = 0,24...0,28 \\ \varepsilon_r = 25...26\% & \sigma_e \cong \sigma_p = 200\text{MPa} \\ Z = 60...70\% & \end{array}$$

### 3.9. Diferite forme de curbe caracteristice

#### 3.9.1. Curba caracteristică convențională

Pe durata încercării la tracțiune a epruvetei, aria secțiunii transversale a acesteia se micșorează datorită contracției transversale. Tensiunea reală, determinată cu relația:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (3.13)$$

va da valori mai mari decât cele obținute din relația (3.5), întrucât  $A < A_0$ . Diagrama dependenței funcționale obținută pe baza relației (3.13) se numește **curba caracteristică reală** (linia întreruptă din fig.3.9). Diagrama trasată pe baza ecuației (3.5) se numește **curbă caracteristică convențională**.

Datorită faptului că în relația (3.5), aria inițială  $A_0$  este o constantă, curba caracteristică convențională are valori inferioare curbei reale. Întrucât diferențele între cele două curbe sunt extrem de mici până la limita de curgere, și cum în calculele de rezistență se folosește porțiunea de curbă până la limita de curgere se preferă curba caracteristică convențională.

#### 3.9.2. Curba caracteristică a oțelului la compresiune

Pentru efectuarea încercării la compresiune a oțelului se utilizează epruvete care au diametrul egal cu înălțimea conform STAS 1552-78  $d_0 = h_0 = 10...30$  mm.

În urma încercării la compresiune a epruvetelor din oțel s-a constatat că se obțin aceleași valori, ca și la tracțiune, pentru mărimile  $\sigma_p$ ,  $\sigma_e$ ,  $\sigma_c$  și E.

La oțelurile de rezistență mică nu se realizează ruperea: epruveta turtindu-se cu atât mai mult cu cât crește forța (fig.3.10) și încărcarea se consideră terminată când  $h = h_0 / 2$ .

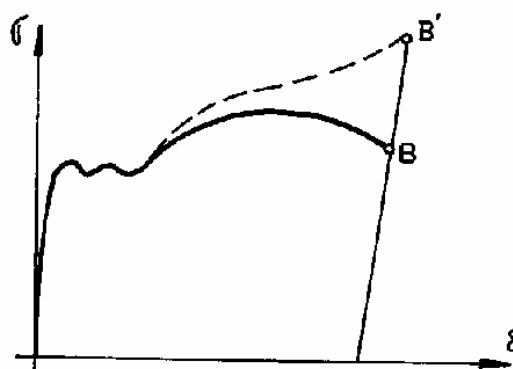


Fig. 3.9

### 3.9.3. Curba caracteristică a oțelului la răsucire

Efectuând încercarea la răsucire a unei epruvete din oțel și trasând curba caracteristică (tensiunea tangențială în funcție de lunecarea specifică) se obține o curbă caracteristică ca în figura 3.11, similară celei de la tracțiune. Pe această curbă se pot defini; limita de proporționalitate  $\tau_p$ , limita de elasticitate  $\tau_e$ , limita de curgere  $\tau_c$ , rezistența la rupere  $\tau_r$  și lunecarea la rupere  $\gamma_r$ . Partea rectilinie, OP a acestei curbe, are ecuația;

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (3.14)$$

care poartă numele de **legea lui Hooke pentru solicitarea de răsucire** (a doua lege a lui Hooke).

Caracteristica G, se numește **modul de elasticitate transversal** și pentru oțel are valoarea  $G = 81 \text{ GPa}$ .

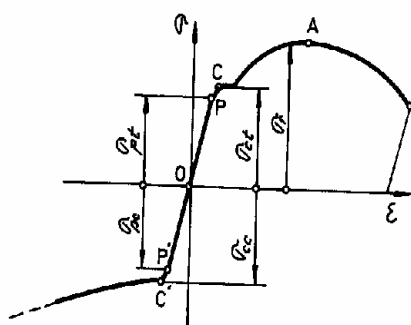


Fig. 3.10

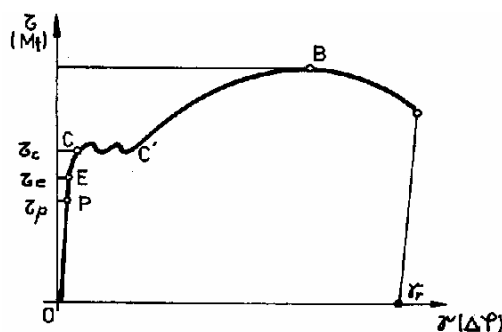


Fig. 3.11

### 3.9.4. Curbe caracteristice la materiale care nu respectă legea lui Hooke

Celor mai multe din materiale le corespund curbele caracteristice curbilinii fără nici o porțiune rectilinie. Astfel, fonta, alama, cuprul, betonul, cauciucul au curbe caracteristice ca în figura (3.12,a), iar altele cum ar fi fibrele textile ca în figura (3.12,b).

Fonta are curba caracteristică curbilinie atât pentru tracțiune cât și pentru compresiune. Se observă că fonta rezistă mai bine la compresiune decât la întindere (fig.3.13).

Betonul, este materialul cel mai des utilizat de constructori la compresiune, deoarece are rezistența la tracțiune foarte mică.

### 3.10. Expresii analitice pentru curba caracteristică idealizată

Numai o porțiune din curba caracteristică și anume OP (fig.3.7,b), pentru oțel și lemn este descrisă de ecuația  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ . Astfel cea mai mare parte din curba caracteristică a oțelului și toate curbele caracteristice pentru celelalte materiale nu sunt descrise prin ecuații liniare.

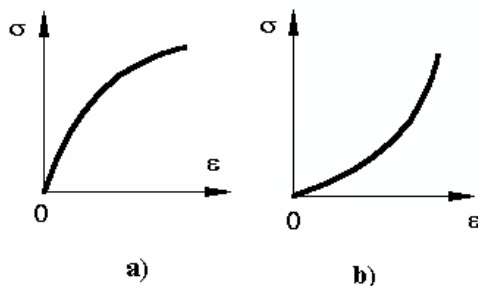


Fig. 3.12

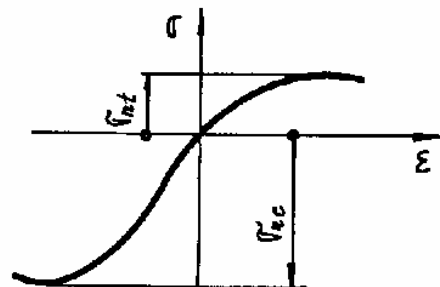


Fig. 3.13

Întrucât în rezistența materialelor sunt necesare, pentru calcul, ecuații simple, explicite ale dependenței  $\sigma = f(\varepsilon)$ , curba caracteristică a fost aproximată printr-o **curbă caracteristică idealizată** numită **diagramă schematizată**.

Diagrama schematizată se obține prin trasarea unei linii, frânte sau curbe, cât mai apropiate de curba caracteristică reală, dar care să aibă o ecuație cât mai simplă. Ca urmare se utilizează frecvent următoarele schematizări:

- prin linii drepte și/sau,
- prin linii curbe continue.



La schematizarea prin linii drepte se admite că limita de proporționalitate coincide cu limita de curgere a materialului.

În figura 3.14 s-a reprezentat schematizarea prin linii drepte a materialelor **elasto-plastice ideale**, sau **diagrama schematizată tip Prandtl** și care corespunde cel mai bine pentru oțelurile de rezistență mică și mijlocie. Schematizarea s-a făcut prin două drepte:

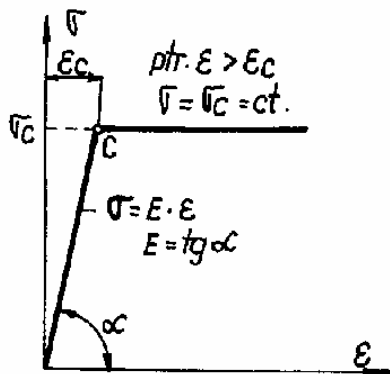


Fig. 3.14

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.15)$$

pentru domeniul elastic ( $\varepsilon \leq \varepsilon_c$ ) și

$$\sigma = \sigma_c = \text{ct.} \quad (3.16)$$

pentru domeniul plastic ( $\varepsilon > \varepsilon_c$ ).

În cazul materialelor care nu satisfac legea lui Hooke, curba caracteristică poate fi asimilată cu o curbă continuă (fig. 3.15) având relația:

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_c} \quad (3.17)$$

unde  $E_c$  și  $n$  sunt constante ce se determină astfel ca funcția adoptată să fie cât mai apropiată de curba reală, stabilită experimental. Astfel, pentru coordonatele a două puncte  $A(\varepsilon_1, \sigma_1)$  și  $B(\varepsilon_2, \sigma_2)$ , din ecuația (4.15) se obțin valorile constantelor:

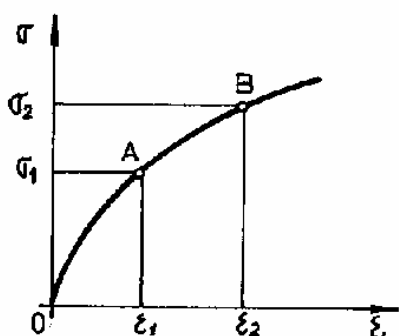


Fig. 3.15

$$E_c = \frac{\sigma_1^n}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2^n}{\varepsilon_2} \quad (3.18)$$

$$n = \frac{\text{Ln} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\text{Ln} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \quad (3.19)$$

Schematizări similare celor de mai sus se pot face și pentru curbe caracteristice corespunzătoare încercării la compresiune sau la torsiune.

### 3.11. Legea generalizată a lui Hooke

Legea lui Hooke, exprimată prin relațiile (3.7) și (3.14) a fost determinată pe cale experimentală pentru o solicitare simplă, respectiv pentru o stare monoaxială de tensiune.

Aceasta va fi generalizată pentru starea spațială de tensiune. Pentru aceasta se consideră un element de volum paralelipedic infinit mic, pe fețele cărui acționează, succesiv, tensiunile principale  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  și  $\sigma_3$  conform figurii 3.16.

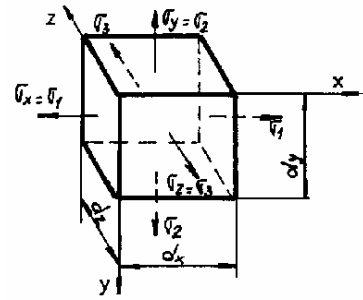


Fig.3.16

a) când  $\sigma_1 > 0$  iar  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , tensiunea  $\sigma_1$  produce următoarele deformații; o alungire specifică,  $\epsilon_1'$ , pe direcția lui  $\sigma_1$  și două scurtări specifice  $\epsilon_2'$  și  $\epsilon_3'$  pe direcțiile 2 și 3. Ținând seama de (3.12) și (3.13) deformațiile specifice rezultă:

$$\epsilon_1' = \frac{1}{E} \cdot \sigma_1; \quad \epsilon_2' = \epsilon_3' = -\nu \cdot \epsilon_1' = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_1;$$

b) când  $\sigma_2 > 0$  iar  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ , tensiunea  $\sigma_2$  produce pe cele 3 direcții deformațiile; o lungire specifică  $\epsilon_2''$  pe direcția lui  $\sigma_2$  și două scurtări specifice  $\epsilon_1''$  și  $\epsilon_3''$  pe celelalte două direcții, date de relațiile:

$$\epsilon_2'' = \frac{1}{E} \cdot \sigma_2; \quad \epsilon_1'' = \epsilon_3'' = -\nu \cdot \epsilon_2'' = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_2;$$

c) când  $\sigma_3 > 0$  iar  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , tensiunea  $\sigma_3$  produce pe cele 3 direcții deformațiile; o lungire specifică  $\epsilon_3'''$  pe direcția lui  $\sigma_3$  și două scurtări specifice după celelalte direcții  $\epsilon_1'''$  și  $\epsilon_2'''$ , date de relațiile:

$$\epsilon_3''' = \frac{1}{E} \cdot \sigma_3; \quad \epsilon_1''' = \epsilon_2''' = -\nu \cdot \epsilon_3''' = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_3.$$

Dacă acționează simultan cele trei tensiuni principale deformațiile specifice totale rezultă prin însumarea efectelor de mai sus (conform principiului suprapunerii efectelor):

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_1' + \epsilon_1'' + \epsilon_1''' = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 &= \epsilon_2' + \epsilon_2'' + \epsilon_2''' = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \epsilon_3 &= \epsilon_3' + \epsilon_3'' + \epsilon_3''' = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dacă axele Oxyz nu coincid cu direcțiile principale atunci tensiunile normale de pe aceste direcții produc lungirile specifice:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (3.21,a)$$

iar tensiunile tangențiale produc alunecările specifice;

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (3.21,b)$$

Relețiile (3.20) și (3.21) exprimă **legea lui Hooke generalizată**.

Elementul de volum infinit mic  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ , din figura 4.11, prin solicitare își modifică volumul. Acesta devine:

$$dV + \Delta \cdot dV = dx \cdot (1 + \varepsilon_x) \cdot dy \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_z).$$

Neglijând infiniții de ordin superior expresia volumului modificat este:

$$dV + \Delta dV = dx \cdot dy \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = dV \cdot (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad \text{iar variația}$$

volumului rezultă:

$$\Delta dV = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \cdot dV.$$

Raportul între variația de volum și volumul inițial, numită **deformația volumică specifică**, este:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (3.22)$$

Înlocuind deformațiile specifice  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  și  $\varepsilon_z$  cu expresiile (3.21) se obține:

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3.22,a)$$

Ținând seama că tensiunea medie este:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad (3.23)$$

se obține:

$$e_v = 3 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot \sigma_m = \frac{\sigma_m}{K}. \quad (3.24)$$

Expresia (4.22) poartă denumirea de **ecuația lui Poisson**, iar constanta:

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \quad (3.25)$$

se numește **modul de elasticitate cubică**.

Relația (3.24) este similară legii lui Hooke și poate fi scrisă sub forma:

$$\sigma_m = K \cdot \varepsilon_v. \quad (3.26)$$

În cazul particular al **stării plane de tensiune** ( $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$ ), legea lui Hooke generalizată devine;

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x), \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}.\end{aligned}\tag{3.27}$$

În mod similar ecuațiilor (3.27), din ecuațiile (3.21) se poate deduce legea lui Hooke pentru starea plană de deformație ( $\varepsilon_z = \gamma_{zy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0$ ).

În practica inginerescă se cere foarte des să se determine tensiunile funcție de deformațiile măsurate pentru starea plană. În acest caz din sistemul (3.27), se obține:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Între constantele elastice  $E$ ,  $G$  și  $\nu$  există următoarea relație de legătură:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}.\tag{3.29}$$

Pentru oțel, cu  $E_{o\ell} = 210 \text{ GPa}$  și  $\nu = 0,3$ , rezultă;  $G_{o\ell} = 81 \text{ GPa}$ .

### 3.12. Întrebări – test

1. Ce este alungirea? Dar lungirea?
2. Ce este deformația specifică?
3. Ce este scurtarea? Dar scurtarea specifică?
4. Ce este lunecarea? Dar lunecarea specifică?
5. Ce este contracția transversală?
6. Ce este tensiunea? Ce reprezintă mărimile  $\sigma$  și  $\tau$ ?
7. Care este unitatea de măsură pentru tensiune?
8. Ce reguli de semne cunoașteți pentru tensiunile  $\sigma$  și  $\tau$ ?
9. Ce reprezintă indicii următoarelor tensiuni:  $\sigma_x$  și  $\tau_{xy}$ ?
10. În ce constă aspectul fizic al unei solicitări?
11. Ce este curba caracteristică?
12. Scrieți expresia matematică a legii lui Hooke.
13. Care este unitatea de măsură pentru  $E$ ? Dar pentru  $\epsilon$ ?
14. De ce starea de tensiune este o mărime tensorială?
15. În ce constă teoria dualității tensiunilor tangențiale?
16. Scrieți legea lui Hooke generalizată în cazul stării spațiale de tensiune.
17. Scrieți relația lui Poisson.
18. Care este legătura dintre  $E$ ,  $G$  și  $\nu$  la un material izotrop? Dar în cazul lemnului?
19. Ce este energia specifică de deformație? Dar energia elementară? Dar energia totală?
20. Care este expresia energiei potențiale specifice de deformație totală în cazul stării spațiale de tensiune? Dar în cazul stării plane de tensiune?
21. Ce este energia de deformație modificatoare de volum? Dar de formă?
22. Care este teorema lucrului mecanic virtual pentru corpurile elastice?
23. Enunțați teorema minimului energiei potențiale totale.
24. Enunțați teorema lui Castigliano.
25. Enunțați teorema lui Mohr – Maxwell.
26. Ce se înțelege prin lungire de rupere?
27. Definiți scurtarea și scurtarea specifică.
28. Definiți lunecarea și lunecarea specifică.
29. Ce este contracția transversală?
30. Ce este tensiunea? Cu ce se notează și care este unitatea de măsură a acesteia?
31. Ce reprezintă indicii pentru următoarele două mărimi  $\sigma_x$  și  $\tau_{xy}$ ?
32. Ce este curba caracteristică?

33. Scrieți expresia matematică a legii lui Hooke și explicitați termenii ce intervin.
34. Care este unitatea de măsură pentru modulele de elasticitate  $E$  și  $G$ ?
35. În ce constă principiul dualității tensiunilor tangențiale?

### 3.13. Probleme propuse

1. Pentru stările plane de tensiune din figura 3.17 (valorile fiind date în [MPa]), se cere să se determine:

- a. tensiunile principale;
- b. direcțiile principale;
- c. să se reprezinte mărimile determinate pe elemente rotite.

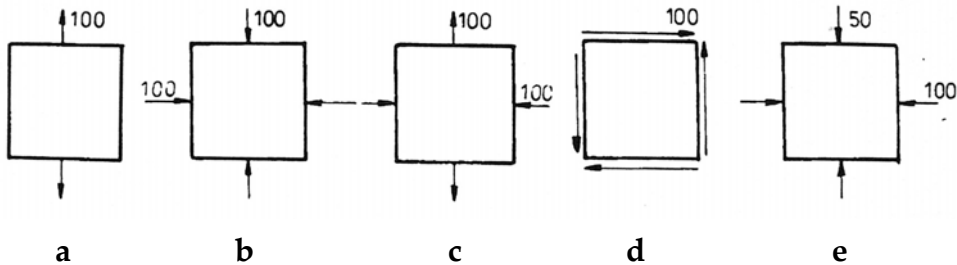


Fig.3.17

2. Pentru stările plane de tensiune din figura 3.18 (valorile fiind date în [MPa]), se cere să se determine:

- a. tensiunile principale;
- b. direcțiile principale;
- c. să se reprezinte mărimile determinate pe elemente rotite.

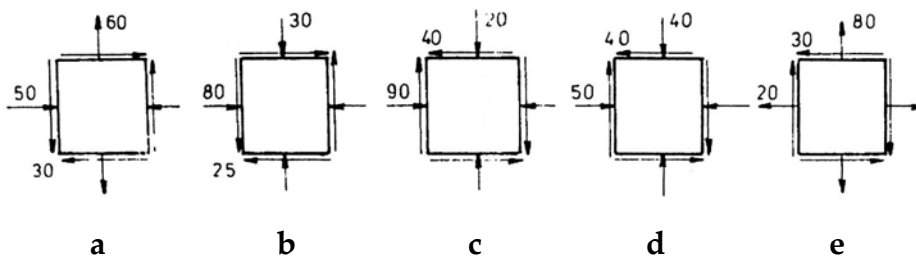


Fig.3.18

3. Pentru stările plane de tensiune din figura 3.19 (valorile fiind date în [MPa]), se cere să se determine:

- a. tensiunile principale;
- b. direcțiile principale;
- c. tensiunile pe fața înclinată;
- d. să se reprezinte mărimile determinate pe elemente rotite.

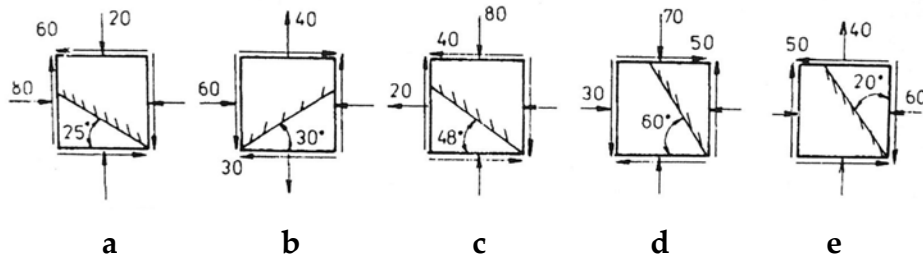


Fig.3.19

4. Pentru stările plane de deformare caracterizate prin deformările măsurate în  $[\mu\text{m}/\text{m}]$  date în figurile 3.20 și 3.21, se cere să se determine:

- deformațiile specifice principale;
- direcțiile principale;
- să se reprezinte mărimile determinate pe elemente rotite și deformate.

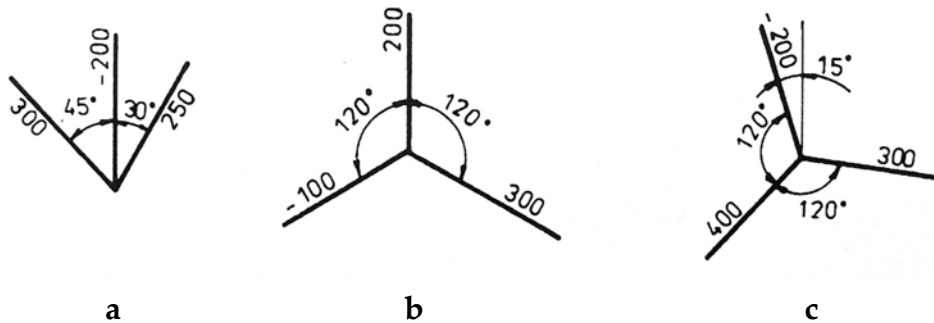


Fig.3.20

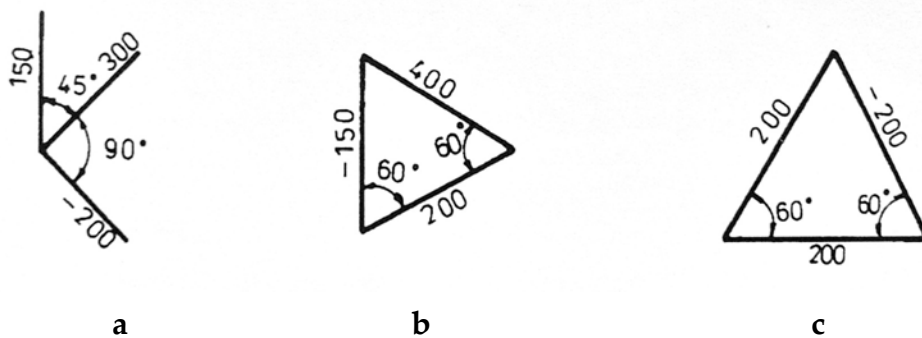


Fig.3.21

5. Pentru stările plane de tensiune din figura 3.22 (valorile fiind date în  $[\text{MPa}]$ ), se cere să se determine:

- tensiunile principale;
- direcțiile principale;
- deformațiile specifice principale, dacă se cunoaște că  $E = 210 \text{ GPa}$  și  $\nu = 0,28$ ;
- să se reprezinte mărimile determinate pe elemente rotite și deformate.

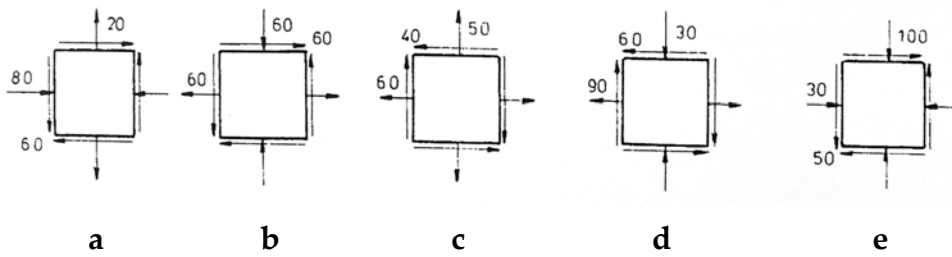


Fig.3.22

6. Pentru stările plane de tensiune din figura 3.23 (valorile fiind date în [MPa]), se cere să se determine:

- tensiunile principale;
- direcțiile principale;
- tensiunile pe fața înclinată;
- deformațiile specifice principale, dacă se cunoaște că  $E = 210 \text{ GPa}$  și  $\nu = 0,28$ ;
- deformațiile specifice pe fața înclinată;
- să se reprezinte mărimile determinate pe elemente rotite și deformate.

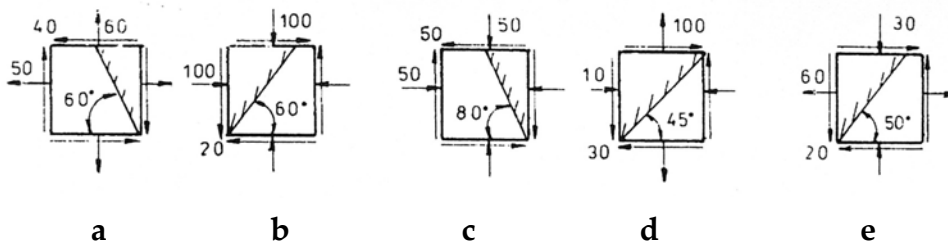


Fig.3.23

7. Pentru stările plane de deformație din figura 3.24 (valorile fiind date în [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]), se cere să se determine:

- deformațiile specifice principale;
- direcțiile principale;
- tensiunile principale dacă se cunoaște că  $E = 210 \text{ GPa}$  și  $\nu = 0,28$ ;
- să se reprezinte mărimile determinate pe elemente rotite și deformate.

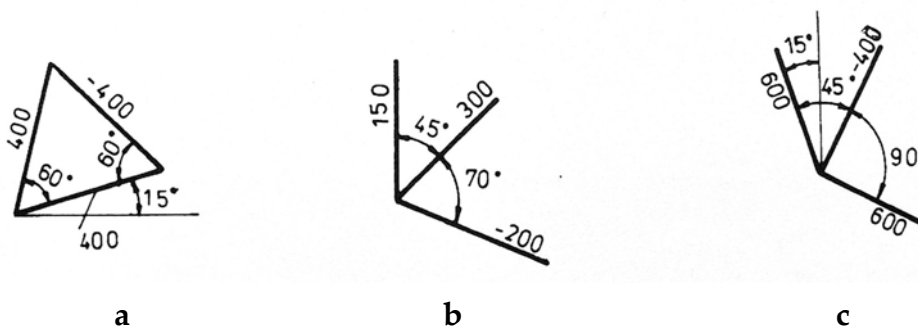
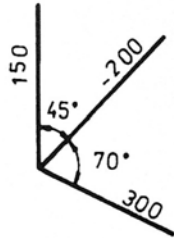


Fig.3.24

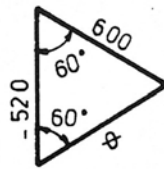


8. Pentru stările plane de deformare din figura 3.25 (valorile fiind date în  $[\mu\text{m}/\text{m}]$ ), se cere să se determine:

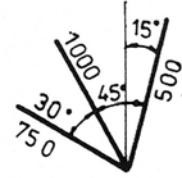
- deformațiile specifice principale;
- direcțiile principale;
- tensiunile principale dacă se cunoaște că  $E = 120 \text{ GPa}$  și  $\nu = 0,20$ ;
- să se reprezinte mărimile determinate pe elemente rotite și deformate.



a



b



c

Fig.3.25



## 4. MĂRIMI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR

### 4.1. Noțiuni generale

În calculul de rezistență se utilizează **mărimi ce depind de forma și mărimea secțiunii transversale a barei**. Acestea se numesc **mărimi sau caracteristici geometrice ale secțiunilor** și sunt: aria, momentele statice, momentele de inerție, modulele de rezistență și razele de inerție.

Pentru studiul acestor mărimi se **secționează imaginar bara cu un plan normal pe axă** (secțiune transversală) și se utilizează **un sistem de axe triortogonal drept, cu axa Ox în lungul barei, cu originea în centrul de greutate al secțiunii și cu axele Oy și Oz în planul secțiunii** (fig.4.1). Întrucât originea sistemului este în centrul de greutate a secțiunii **axele Oy și Oz se numesc axe centrale**.

În anexa 4 se dau relațiile de calcul pentru mărimile geometrice ale unor secțiuni frecvent utilizate în calculele de rezistență.

### 4.2. Aria secțiunii

În jurul unui punct din planul secțiunii se poate lua un element de arie  $dA = dy \cdot dz$ . Dar, în cele ce urmează se vor folosi pentru elementul de arie și alte formule:  $dA=b \cdot dy$ , respectiv  $dA=h \cdot dz$  pentru dreptunghi, sau  $dA = 2\pi \cdot r \cdot dr$  pentru cerc, etc. Aria secțiunii se va obține din relația:

$$A = \int_A dA. \quad (4.1)$$

Ariile secțiunilor barelor (profilelor) standardizate sunt date în tabele din anexe. Relația (4.1) se va utiliza pentru determinarea ariilor secțiunilor oarecare.

### 4.3. Momente statice

În rezistența materialelor se folosesc momente statice ale suprafețelor față de axele  $z$  și  $y$ , definite de expresiile:

$$S_z = \int_{A_1} y \cdot dA, \quad S_y = \int_{A_2} z \cdot dA, \quad (4.2)$$

în care  $A_1$  și  $A_2$  sunt părți ale ariei  $A$ . Momentele statice, ale întregii secțiuni față de axele  $y_1$  și  $z_1$ , paralele cu axele centrale  $y$  și  $z$ , sunt:

$$S_{z_1} = \int_A y_1 \cdot dA, \quad S_{y_1} = \int_A z_1 \cdot dA,$$

în care  $y_1 = y_0 + y$ ,  $z_1 = z_0 + z$  (fig. 4.1,b).

Prin aplicarea teoremei momentului static (a lui Varignon),

$$\int_A y_1 \cdot dA = y_0 \cdot \int_A dA, \quad \int_A z_1 \cdot dA = z_0 \cdot \int_A dA, \quad (4.3,a)$$

se obțin formulele ce definesc poziția centrului de greutate față de sistemul de axe  $O_1y_1z_1$ , ales inițial:

$$y_0 = \frac{\int_A y_1 \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}, \quad z_0 = \frac{\int_A z_1 \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad (4.3)$$

Față de axele centrale momentele statice ale întregii secțiuni sunt nule:

$$S_z = \int_A y \cdot dA = 0, \quad S_y = \int_A z \cdot dA = 0. \quad (4.4)$$

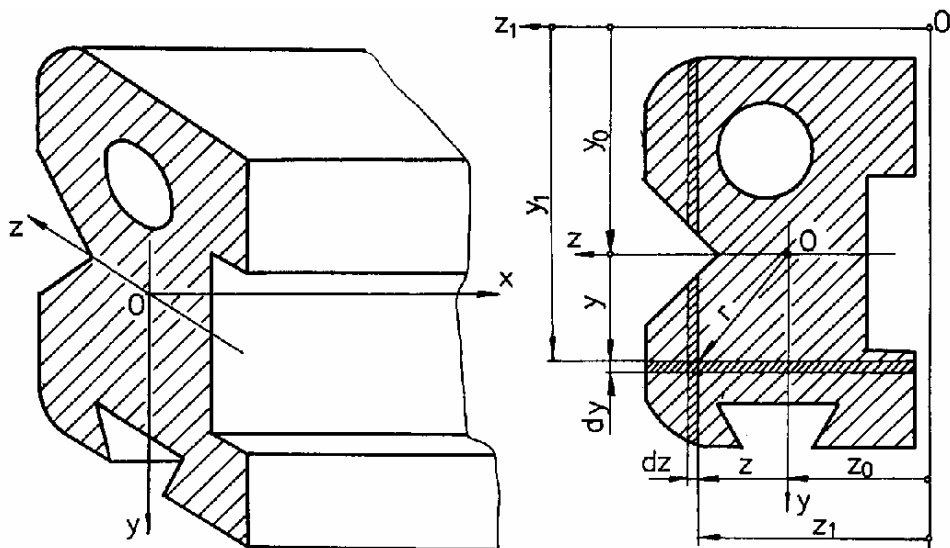


Fig. 4.1

Datorită faptului că axele de simetrie sunt și axe centrale, momentele statice ale întregii secțiuni față de aceste axe sunt nule. Evident că, **momentul static pentru o parte din secțiune, față de axele de simetrie, nu este nul.**

Momentele statice se măsoară în  $\text{mm}^3$ ,  $\text{cm}^3$ ,  $\text{m}^3$ .

## 4.4. Momente de inerție

### 4.4.1. Relații de definiție

Se definesc următoarele momente de inerție geometrice:

a. axiale față de axa Oz, și respectiv Oy (fig. 4.1,b):

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA, \quad I_y = \int_A z^2 \cdot dA, \quad (4.5)$$

b. centrifugale (în planul Ozy):

$$I_{zy} = \int_A y \cdot z \cdot dA, \quad (4.6)$$

c. polare (față de centrul de greutate O):

$$I_o = I_p = \int_A r^2 \cdot dA. = I_z + I_y. \quad (4.7)$$

Întrucât  $r^2 = y^2 + z^2$ , din (4.7) rezultă:

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A z^2 \cdot dA = I_z + I_y$$

Deci, **momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție axiale, în raport cu axele ortogonale ce trec prin polul considerat.**

Întrucât elementul de arie este o mărime pozitivă, iar  $z^2$ ,  $y^2$  și  $r^2$  sunt mărimi pozitive, rezultă că **momentele de inerție axiale și polare sunt mărimi strict pozitive.**

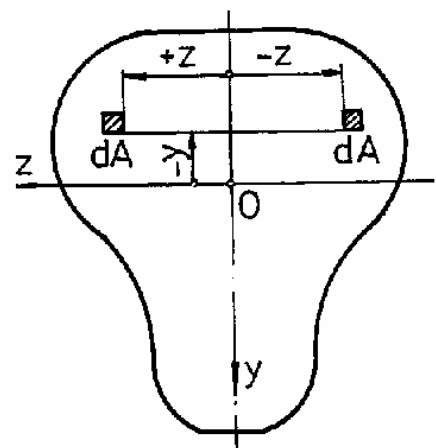


Fig. 4.2

Momentul de inerție centrifugal, ce este produsul dintre elementul de arie  $dA$  și două coordonate ( $y$ ,  $z$ ) și ca atare poate fi pozitiv, negativ sau egal cu zero. Pentru secțiunile ce au cel puțin o axă de simetrie (axa Oy în figura 4.2) există totdeauna, la ordonata  $y$ , două elemente de arie aflate simetric față de axa de simetrie (Oy): unul de abscisă pozitivă ( $+z$ ) și altul negativă ( $-z$ ) astfel că, pentru toată aria secțiunii, se obține:

$$I_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA = 0.$$

Deci, **momentul de inerție centrifugal față de un sistem de axe din care cel puțin una este axa de simetrie este nul.**

Momentele de inerție se măsoară în  $\text{mm}^4$ ,  $\text{cm}^4$ ,  $\text{m}^4$ .

#### 4.4.2. Variația momentelor de inerție față de axe paralele

Pentru secțiunea din figura (4.1,b) se consideră cunoscute momentele de inerție axiale  $I_z$ ,  $I_y$  și centrifugale  $I_{zy}$  față de sistemul de axe central  $Ozy$ .

Elementul de arie  $dA$ , în sistemul de axe  $O_1z_1y_1$ , paralele față de  $Ozy$  (fig.4.1,b), are coordonatele:

$$y_1 = y_0 + y, z_1 = z_0 + z$$

În raport cu sistemul de axe  $O_1 y_1 z_1$  momentele de inerție au expresiile:

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + y_0)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + y_0^2 \int_A dA + 2 \cdot y_0 \cdot \int_A y \cdot dA,$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 \cdot dA = \int_A (z + z_0)^2 \cdot dA = \int_A z^2 \cdot dA + z_0^2 \int_A dA + 2 \cdot z_0 \cdot \int_A z \cdot dA,$$

$$\begin{aligned} I_{z_1y_1} &= \int_A y_1 \cdot z_1 \cdot dA = \int_A (y + y_0) \cdot (z + z_0) dA = \\ &= \int_A y \cdot z \cdot dA + y_0 \cdot z_0 \cdot \int_A dA + y_0 \cdot \int_A z \cdot dA + z_0 \cdot \int_A y \cdot dA. \end{aligned}$$

Efectuând integralele și ținând seama de relațiile (4.1), (4.4), (4.5) și (4.6) se obține:

$$I_{z_1} = I_z + y_0^2 \cdot A,$$

$$I_{y_1} = I_y + z_0^2 \cdot A, \tag{4.9}$$

$$I_{z_1y_1} = I_{zy} + z_0 \cdot y_0 \cdot A.$$

Deci, **momentul de inerție în raport cu o axă paralelă este egal cu suma dintre momentul față de axa centrală paralelă și produsul dintre aria suprafeței cu pătratul distanței dintre axe.**

**Momentul de inerție centrifugal față de axele paralele este egal cu suma dintre momentul de inerție față de axele centrale proprii și produsul dintre arie cu coordonatele centrului de greutate al ariei în noul sistem.**

Deci, valoarea și semnul momentului de inerție centrifugal este hotărâtă de **semnul produsului coordonatelor centrului de greutate a secțiunii în noul sistem.**

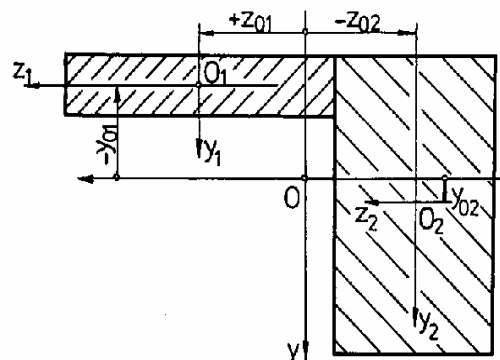


Fig.4.3

De aceea, la determinarea momentelor de inerție centrifugale trebuie să acordăm atenția cuvenită **semnelor coordonatelor** centrelor de greutate a secțiunilor componente. Pentru a ilustra acest fapt s-a considerat secțiunea compusă din figura 4.3.

Întrucât axele centrale ale celor două dreptunghiuri sunt axe de simetrie, momentele de inerție centrifugale față de axele proprii, ale fiecărui dreptunghi, sunt nule. Față de sistemul de axe central,  $Ozy$ , se determină momentul de inerție prin însumarea produselor  $z_{oi} \cdot y_{oi} \cdot A_i$  corespunzătoare. Ținând seama de semnele coordonatelor centrelor de greutate ale fiecărei figuri, în sistemul de axe  $Ozy$  rezultă:

$$A_1(-y_{01}, +z_{01}); I_{y_1z_1} < 0,$$

$$A_2(+y_{02}, -z_{02}); I_{y_2z_2} < 0$$

Deci, în acest caz, momentul centrifugal al secțiunii (descompusă în două dreptunghiuri (fig.4.3), are semnul minus.

**Momentele de inerție ale unei secțiuni compuse din n secțiuni simple de arii  $A_i$**  (sau  $A$  descompusă în  $n$  secțiuni simple  $A_i$ ), **față de sistemul de axe  $Oyz$**  (de regulă sistem de axe centrale), se calculează cu relațiile:

$$I_z = \sum_{i=1}^n (I_{z_i} + A_i \cdot y_{0i}^2),$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + A_i \cdot z_{0i}^2), \quad (4.10)$$

$$I_{zy} = \sum_{i=1}^n (I_{z_i y_i} + A_i \cdot y_{0i} \cdot z_{0i}),$$

unde:  $I_{z_i}, I_{y_i}, I_{z_i y_i}$  sunt momentele de inerție axiale, respectiv centrifugale ale fiecărei secțiuni de arie  $A_i$  față de axele centrale proprii ( $O_{i1}z_{i1}y_{i1}$ ), paralele cu axele  $Ozy$  iar  $z_{oi}, y_{oi}$ , sunt coordonatele centrelor de greutate  $O_i$  în sistemul de  $Ozy$ .

Tensorul momentelor de inerție este:

$$T_1 = \begin{pmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{zy} & I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix};$$

Momentul de inerție polar:

$$I_p = I_z + I_y = I_1 + I_2;$$

Metoda grafică, a cercului lui Mohr, se poate utiliza și pentru determinarea mărimilor:  $I_u, I_v, I_{uv}$  (de parametru  $2\alpha$ ),  $I_1, I_2, \alpha_1$  etc. dacă se procedează analog ca în § 3.5.

Ținând seama că momentul de inerție centrifugal față de un sistem de axe ce conține o axă de simetrie este nul, rezultă că **axa de simetrie este o axă principală iar a doua axă principală este perpendiculară pe axa de simetrie în centrul de greutate.**

## 4.5 Aplicații

### 4.5.1 Momentele de inerție centrale ale unui dreptunghi (fig.4.5)

Axele  $Ozy$  sunt axe centrale principale de inerție (axe de simetrie). Se alege elementul de arie  $dA = b \cdot dy$ , la ordonata  $y$ . Înlocuind în prima relație (4.5) se obține:

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b}{3} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^3 - \left( -\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Procedând în mod similar față de axa  $Oy$  se obțin formulele:

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad I_{zy} = 0. \quad (4.11)$$

Momentul de inerție centrifugal este nul deoarece axele  $z$  și  $y$  sunt axe de simetrie (vezi § 4.4.1).

### 4.5.2. Momentele de inerție centrale ale secțiunii circulare (fig. 4.6)

Se alege sistemul de axe centrale principale cu originea în centrul cercului și elementul de arie  $dA = 2\pi \cdot r \cdot dr$ .

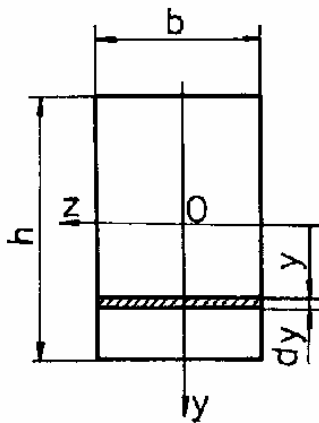


Fig. 4.5

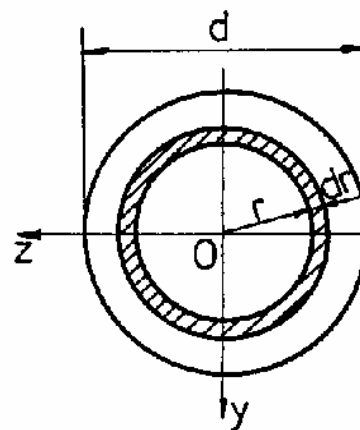


Fig. 4.6

Aplicând relația (4.7), se obține momentul de inerție polar:

$$I_p = I_0 = \int_A r^2 \cdot dA = 2\pi \cdot \int_0^{d/2} r^3 \cdot dr = \frac{2\pi}{4} \cdot \left( \frac{d}{2} \right)^4$$

deci,

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (4.12)$$



Întrucât axele  $z$  și  $y$  sunt axe diametrale (ecuatoriale) ale cercului, există egalitatea  $I_z = I_y$  și din (4.12) se obține:

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}, \quad I_{zy} = 0. \quad (4.13)$$

### 4.5.3. Secțiunea inelară sau coroană circulară (fig. 4.7)

Considerând că această secțiune este compusă dintr-un cerc de diametru  $D$ , din care se scade alt cerc de diametru  $d$ , momentul de inerție polar se obține:

$$I_p = \frac{D^4}{32} - \frac{d^4}{32} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \quad (4.14)$$

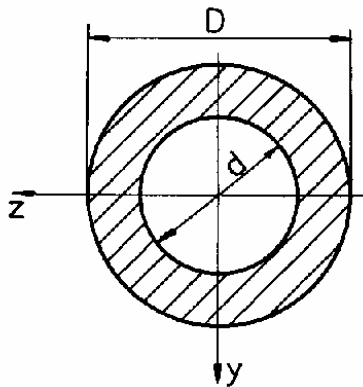


Fig. 4.7

În mod similar pentru momentele de inerție axiale, se obține:

$$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \quad (4.15)$$

Raportul  $k = \frac{d}{D}$  este un factor constructiv al secțiunii inelare, astfel că momentele de inerție polare, respectiv axiale sunt funcție numai de diametrul exterior  $D$  și se poate scrie

$$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - k^4) \quad \text{și} \quad I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - k^4). \quad (4.15,a)$$

#### 4.5.4. Secțiunea compusă din două dreptunghiuri având axa Oy axă de simetrie (fig.4.8)

a. Poziția centrului de greutate în sistemul de axe  $O_1z_1y_1$  rezultă:

$$z_G = 0, \quad y_G = \frac{6 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 12 \cdot 8}{6 \cdot 4 + 2 \cdot 12} = 4 \text{ cm}$$

În figura 4.8 s-au trasat axele principale  $Ozy$  și s-au cotate pozițiile centrelor de greutate ale secțiunilor simple.

b. Momentele de inerție față de axele centrale sunt date de relațiile următoare

În acest caz  $I_{zy} = 0$ , deoarece există o axă de simetrie.

$$I_y = (I_{z_i} + A_i \cdot z_{oi}^2) = \frac{6^3 \cdot 4}{12} + 6 \cdot 4 \cdot 0^2 + \frac{2^3 \cdot 12}{12} + 2 \cdot 12 \cdot 0 = 80 \text{ cm}^4$$

$$I_z = (I_{y_i} + A_i \cdot y_{oi}^2) = \frac{6 \cdot 4^3}{12} + 24 \cdot 4^2 + \frac{2 \cdot 12^3}{12} + 24 \cdot 4^2 = 1088 \text{ cm}^4$$

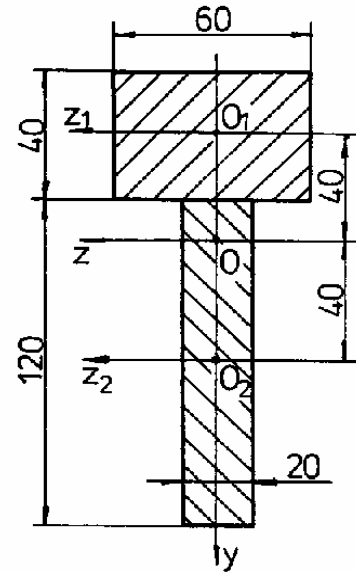


Fig. 4.8

#### 4.6. Raze de inerție

Prin definiție, mărimile geometrice

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad \text{și} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad (4.16)$$

se numesc **raze de inerție (girație)**.

Relațiile de definiție (4.16) se pot aplica oricăror momente de inerție axiale:  $I_z, I_y, I_u, I_v, I_1, I_2$  etc.

Momentul de inerție față de axa rotită  $u$ , dacă  $I_z = I_1$  și  $I_y = I_2$ , are expresia:

$$I_u = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot \cos 2\alpha = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha,$$

din care, înlocuind expresiile (4.16), se obține:

$$i_u^2 = i_1^2 \cdot \cos^2 \alpha + i_2^2 \cdot \sin^2 \alpha \quad (4.16,a)$$

Alegând pe raza  $u$  un punct  $Q$  de coordonate:

$$y = OQ \cdot \cos \alpha + \frac{i_1 \cdot i_2}{i_u} \cdot \cos \alpha, \quad z = OQ \cdot \sin \alpha = \frac{i_1 \cdot i_2}{i_u} \cdot \sin \alpha,$$

și înlocuind în relația (4.23,a) se obține ecuația unei elipse:

$$\frac{z^2}{i_1^2} + \frac{y^2}{i_1^2} = 1, \quad (4.17)$$

numită **elipsă de inerție**. **Semiaxele acesteia sunt razele de inerție principale.**

Pentru trasarea elipsei de inerție, se marchează valorile calculate cu formulele (4.16) ale mărimilor  $i_1$  și  $i_2$  astfel:  $i_1$  pe axa 2 și  $i_2$  pe axa 1; astfel că după trasare elipsa are o formă alungită, ca și a secțiunii.

Pentru secțiunea dreptunghiulară, prin aplicarea relației (4.16) rezultă relații pentru razele de inerție:

$$\begin{aligned} i_z &= \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12b \cdot h}} = \frac{h}{\sqrt{12}}, \\ i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{b^3 \cdot h}{12b \cdot h}} = \frac{b}{\sqrt{12}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

În cazul secțiunii circulare se obține:

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{4}{\pi \cdot d^2}} = \frac{d}{4} \quad (4.19)$$

iar pentru secțiunea inelară rezultă:

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{\pi \cdot D^4 - d^4}{64 \cdot D^2 - d^2} \cdot \frac{4}{\pi}} = \frac{\sqrt{D^2 - d^2}}{4} = \frac{D}{4} \cdot \sqrt{1 - k^2}. \quad (4.20)$$

Razele de girație se exprimă în unități de lungime (m, cm, mm).

## 4.7. Module de rezistență

La calculul modulelor de rezistență se consideră că axele  $Oz$  și  $Oy$  sunt axe centrale principale.

Mărimile geometrice:

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} \text{ și } W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|}, \quad (4.21)$$

se numesc module de rezistență față de axa  $Oz$ , respectiv  $Oy$ . În relațiile de mai sus  $y_{\max}$ , respectiv  $z_{\max}$  este: distanța celui mai îndepărtat punct al secțiunii față de axa  $Oz$ , respectiv față de axa  $Oy$ .

Mărimea,

$$W_P = \frac{I_P}{R_{\max}}, \quad (4.22)$$

se numește **modul de rezistență polar**.  $R_{\max}$  este distanța între centrul de greutate (polul secțiunii) și cel mai îndepărtat punct față de pol.

În cazul secțiunilor dreptunghiulare, modulele de rezistență axiale rezultă:

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{\max}|} = \frac{b^3 \cdot h}{12} \cdot \frac{2}{b} = \frac{b^2 \cdot h}{6}.$$
(4.23)

Pentru secțiunea circulară, modulele de rezistență axiale sunt:

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{32},$$
(4.24)

iar modulul de rezistență polar va fi:

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$
(4.25)

În cazul secțiunii inelare (fig. 4.7) se obțin formulele:

$$W_z = W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)\right]^4 = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - k^4),$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)\right]^4 = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - k^4).$$
(4.26)

Din analiza formulelor (4.26), în comparație cu (4.14) și (4.15p), trebuie remarcat și reținut faptul că **modulele de rezistență ale secțiunilor compuse nu se pot obține prin însumarea modulelor de rezistență ale figurilor componente, ci numai prin aplicarea relațiilor (4.21) și (4.22).**

## 4.8. Întrebări - test

1. Care este teorema momentului static?
2. Când momentele statice sunt zero?
3. Scrieți relațiile lui Steiner.
4. Când momentul centrifugal  $I_{yz}$  este nul?
5. Definiți raza de inerție.
6. Definiți modulul de rezistență polar.
7. Definiți modulul de rezistență axial.
8. Care sunt unitățile de măsură pentru următoarele mărimi geometrice:
  - a. Moment static;
  - b. Moment de inerție;
  - c. Rază de inerție;
  - d. Modul de rezistență?
9. Să se definească raza de inerție.
10. Definiți modulul de rezistență axial.
11. Definiți modulul de rezistență polar.
12. Care sunt unitățile de măsură pentru următoarele mărimi geometrice:
  - a. momente statice;
  - b. momente de inerție;
  - c. raze de inerție;
  - d. arie;
  - e. module de rezistență.

## 4.9. Probleme propuse

1. Pentru secțiunile prezentate în figura 4.9 se cere să se determine:

- momentele de inerție principale centrale și polar;
- direcțiile principale;
- modulele de rezistență axiale și polar;
- razele de inerție și să se traseze elipsa de inerție.

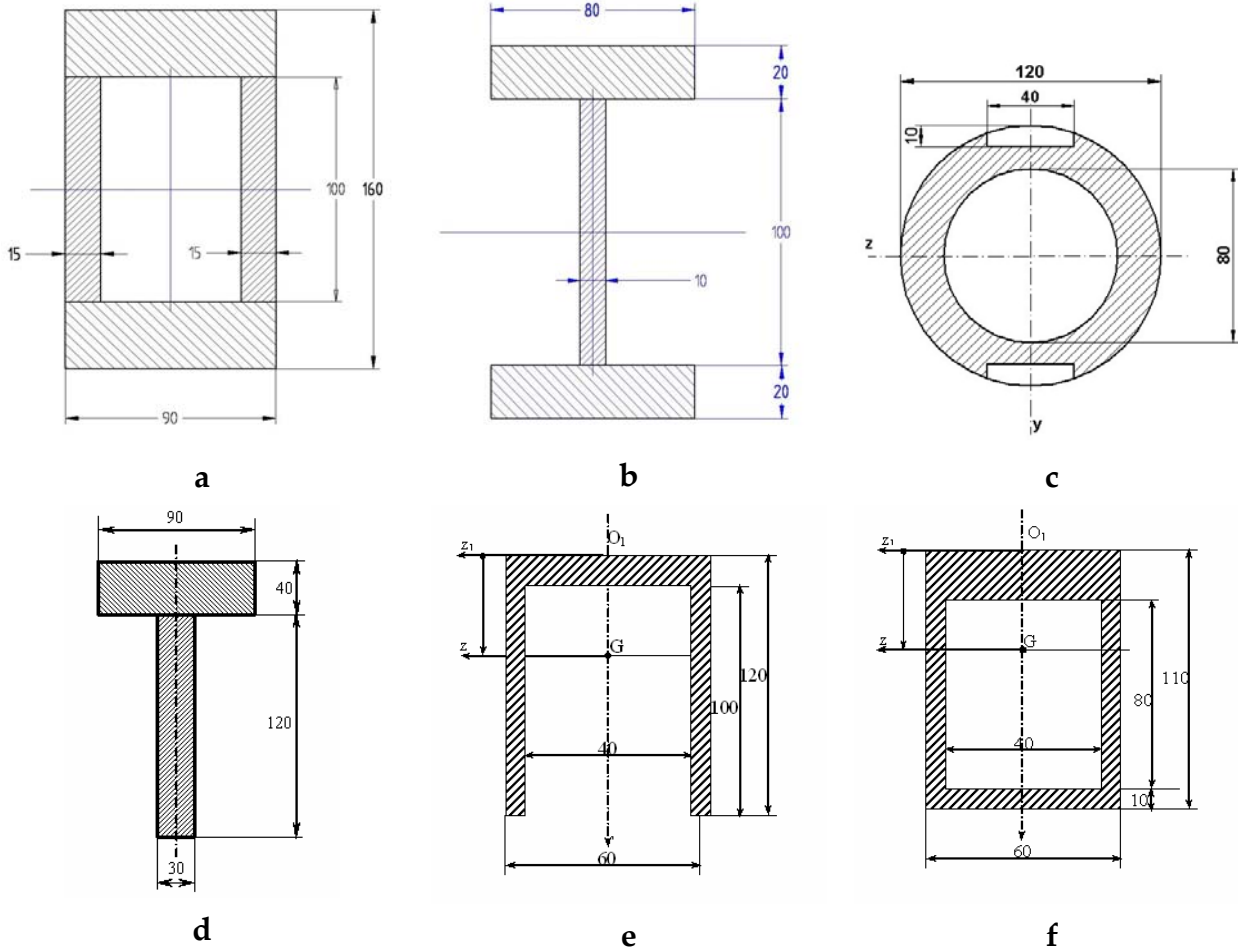


Fig. 4.9

2. Să se determine distanțele  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , dintre profilele ce formează secțiunile din figura 4.10, astfel încât momentele de inerție principale centrale să fie egale între ele. Corespunzător acestor momente de inerție să se determine modulele de rezistență și razele de inerție ale acestor secțiuni.

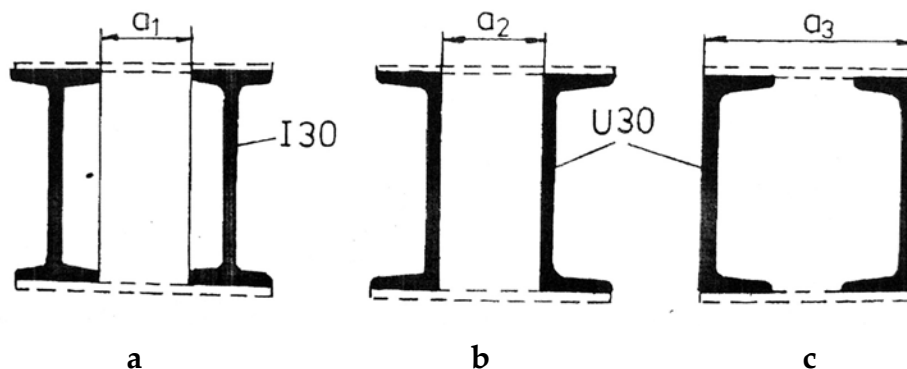


Fig. 4.10

3. Pentru secțiunile prezentate în figura 4.11 se cere să se determine:

- momentele de inerție principale centrale și polar;
- direcțiile principale;
- modulele de rezistență axiale și polar;
- razele de inerție și să se traseze elipsa de inerție.

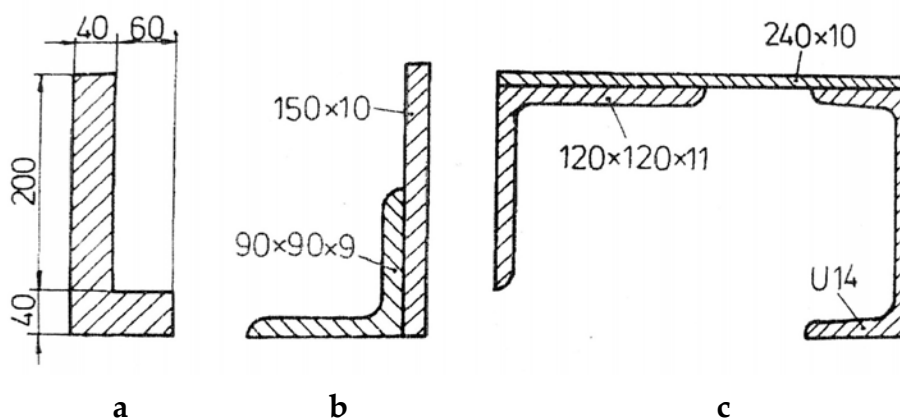


Fig. 4.11

4. Pentru secțiunile prezentate în figura 4.12 se cere să se determine:

- momentele de inerție principale centrale și polar;
- modulele de rezistență axiale și polar;
- razele de inerție și să se traseze elipsa de inerție.

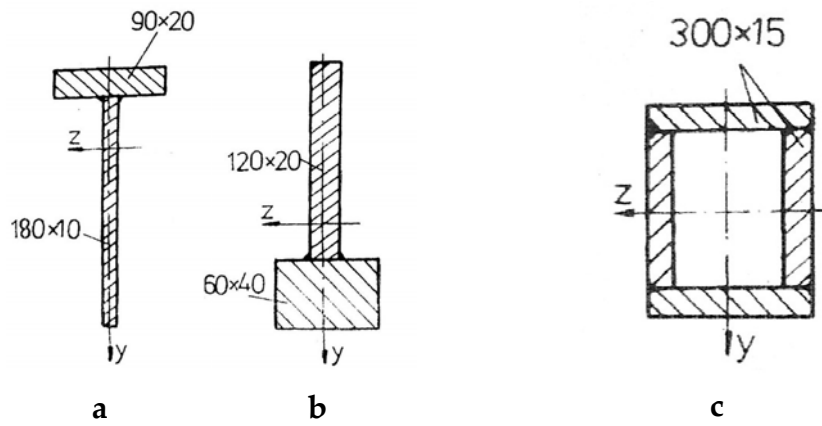


Fig. 4.12

5. Pentru secțiunile prezentate în figura 4.13 se cere să se determine:

- momentele de inerție principale centrale și polar;
- modulele de rezistență axiale și polar;
- razele de inerție și să se traseze elipsa de inerție.

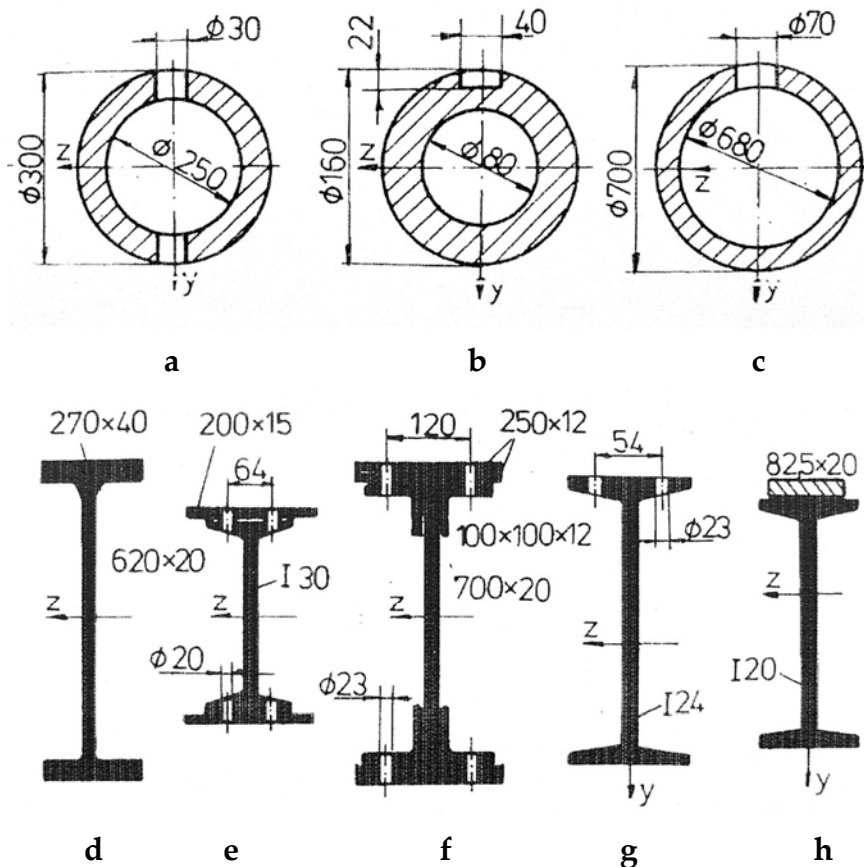


Fig. 4.13



## 5. SOLICITĂRI AXIALE

### 5.1. Tensiuni și deformații

O bară este solicitată axial, dacă în secțiunile ei transversale se dezvoltă numai forțe axiale  $N$ , care pot fi constante sau variabile. Valoarea forței axiale, în dreptul unei secțiuni, este egală cu suma proiecțiilor pe axa barei, a tuturor forțelor situate la stânga sau la dreapta secțiunii considerate.

Pentru studiul eforturilor se recomandă să se reprezinte diagrama forțelor axiale pentru determinarea secțiunii (sau secțiunilor) periculoase. Forțele axiale **sunt considerate pozitive când produc solicitarea de întindere și negative când produc solicitarea de compresiune a secțiunii transversale.**

Forța axială este rezultanta tuturor tensiunilor normale care se dezvoltă într-o anumită secțiune transversală. Pentru a determina tensiunile, se consideră o bară solicitată axial, de lungime  $L$ , confecționată dintr-un material omogen și izotrop și care are o secțiune transversală constantă, cu aria  $A$ .

Prin aplicarea unei forțe axiale  $N$  bara se lungeste cu cantitatea  $\Delta L$ . O secțiune oarecare  $BC$ , situată la abscisa  $x$  se deplasează cu cantitatea  $\Delta x$ . Conform ipotezei lui Bernoulli o secțiune plană și normală pe axa barei înainte de deformație rămâne plană și normală pe axa barei după deformație, rezultă că toate punctele secțiunii  $BC$  se deplasează axial cu aceeași valoare  $\Delta x = ct.$  și:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = ct.$$

Conform legii lui Hooke, alungirii specifice constante, îi corespund tensiuni normale constante;

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

Prin ipoteză am considerat materialul izotrop, deci modulul de elasticitate este constant ( $E = ct.$ ) și ca urmare rezultă  $\sigma = ct.$

Deci, **tensiunile sunt repartizate uniform pe suprafața secțiunii transversale** (fig.5.1,b).

Din ecuația de echilibru scrisă pentru partea din stânga a barei (fig.5.1,b) rezultă:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \cdot \int_A dA = \sigma \cdot A.$$

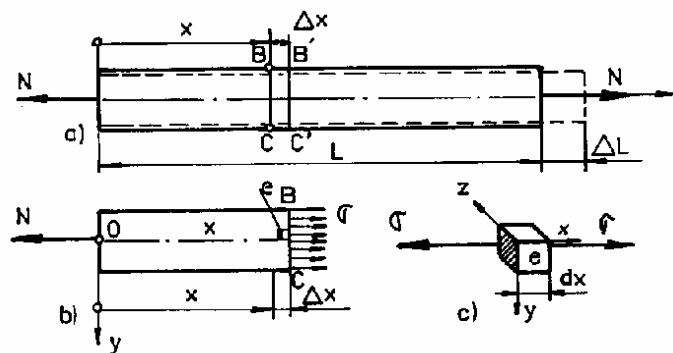


Fig. 5.1

Din această ecuație se obține valoarea tensiunii normale pentru solicitarea la întindere sau compresiune:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (5.1)$$

Starea de tensiune, în acest caz, este o stare uniaxială (fig. 5.1,c).

Întrucât se consideră că materialul satisface legea lui Hooke, deformația specifică pentru solicitări axiale, are expresia:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot A}. \quad (5.2)$$

Valoarea alungirii, respectiv a scurtării totale a barei este:

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}. \quad (5.3,a)$$

Dacă pe lungimea barei mărimile  $N$ ,  $E$ , și  $A$  sunt variabile, sau constante pe anumite porțiuni ale barei, alungirea se calculează cu relația:

$$\Delta L = \int_L \frac{N}{E \cdot A} dx \quad \text{sau} \quad \Delta L = \sum \frac{N \cdot L}{E \cdot A}. \quad (5.3,b)$$

Alungirea (scurtarea)  $\Delta L$  este cu atât mai mică cu cât produsul  $EA$  este mai mare și de aceea produsul  $EA$  se numește **modul de rigiditate la întindere-compresiune**.

Relațiile deduse mai sus și cele ce se vor deduce mai jos sunt valabile atât pentru solicitarea la întindere cât și pentru cea de compresiune.

**Barele de lungime mare solicitate la compresiune trebuie verificate la flambaj** (vezi. § 15). Fenomenul de flambaj (numit și pierderea stabilității elastice), se produce înainte ca tensiunile produse de solicitarea la compresiune să atingă valoarea  $\sigma_a$ . De aceea nu se pot calcula la compresiune decât barele scurte, a căror lungime nu întrece de 15 ori dimensiunea cea mai mică a secțiunii transversale;

$$L \leq 15 \cdot d_{\min}, \quad (5.4)$$

iar pentru  $L \geq 15 \cdot d_{\min}$  se va face calculul la flambaj (vezi § 15).

## 5.2. Calculul de rezistență la întindere - compresiune

Relațiile deduse mai sus se utilizează pentru rezolvarea problemelor Rezistenței materialelor; verificare, capacitate de încărcare și dimensionare. Rezolvarea acestor probleme se face respectând atât în condiția de rezistență ( $\sigma_{\max} \leq \sigma_a$ ) cât și cea de rigiditate ( $\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_a$  sau  $\Delta L_{\max} \leq \Delta L_a$ ). Rezistența admisibilă ( $\sigma_a$ ) respectiv deformația admisibilă ( $\varepsilon_a, \Delta L_a$ ) depind de factorii analizați în §1.5. Rezistențele admisibile pentru câteva materiale sunt date în Anexa 1.

Ținând seama de aceste considerente se deduc, pe probleme, formulele de calcul.

**a. Verificarea** unei piese solicitată de un efort axial, constă în determinarea tensiunii maxime respectiv a deformației maxime și compararea valorii obținute cu cea admisibilă. Valoarea rezultată trebuie să nu depășească pe cea admisibilă adică:

- din condiția de rezistență:

$$\sigma_{\text{ef}} = \frac{N_{\text{max}}}{A_{\text{ef}}} \leq \sigma_a \quad (5.5)$$

- din condiția de rigiditate:

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{N}{E \cdot A} \leq \varepsilon_a \quad \text{sau} \quad \Delta L_{\text{max}} = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \leq \Delta L_a. \quad (5.5,a)$$

În prima relație (5.5) prin  $A_{\text{ef}}$  se înțelege valoarea ariei efective a secțiunii. În figura 5.2 se dau ariile efective pentru câteva secțiuni.

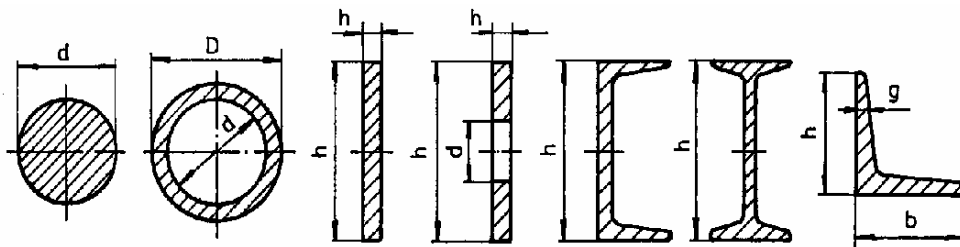


Fig. 5.2

Inegalitățile din formulele (5.5) nu sunt total restrictive, în sensul că **se pot depăși cu 3...5 % valorile limită** ( $\sigma_a, \varepsilon_a, \Delta L_a$ ). Pentru a îndeplini condiția de utilizare eficientă a barei se recomandă ca valoarea efectivă a tensiunii sau a deformației să nu fie inferioare valorii de 80 % din valoarea admisibilă.

Dacă bara îndeplinește simultan condițiile:

$$\begin{aligned} 0,8 \cdot \sigma_a &\leq \sigma_{\text{max}} \leq 1,05 \cdot \sigma_a, \\ 0,8 \cdot \varepsilon_a &\leq \varepsilon_{\text{max}} \leq 1,05 \cdot \varepsilon_a, \\ 0,8 \cdot \Delta L_a &\leq \Delta L_{\text{max}} \leq 1,05 \cdot \Delta L_a. \end{aligned} \quad (5.5,c)$$

vom spune că „BARA REZISTĂ”.

Dacă o singură mărime calculată din relațiile (5.5) depășește cu 5% valoarea admisă atunci „BARA NU REZISTĂ”.

În cazul în care toate mărimile calculate sunt inferioare valorii de 80% din cele admisibile „BARA ESTE SUPRADIMENSIONATĂ”.

Atât în cazul în care bara nu rezistă cât și în cazul în care este supradimensionată se va calcula valoarea sarcinii capabile.

**b. Capacitatea de încărcare** se calculează atât pentru barele la care nu se cunoaște valoarea încărcării cât și pentru acelea ce au fost verificate și n-au corespuns sarcinii impuse, fie că erau subdimensionate sau/și supradimensionate.

Cunoscând dimensiunile secțiunii transversale ale barei, materialul din care este confecționată ( $\sigma_a$ ) și condițiile de deformare ( $\varepsilon_a$ ,  $\Delta L_a$ ), forța axială maximă se determină cu una din formulele:

- din condiția de rezistență;

$$N_{\text{cap}} = A_{\text{ef}} \cdot \sigma_a, \quad (5.6,a)$$

- din condiția de rigiditate:

$$N_{\text{cap}} = E \cdot A_{\text{ef}} \cdot \varepsilon_a \quad \text{sau} \quad N_{\text{cap}} = \frac{E \cdot A_{\text{ef}} \cdot \Delta L_a}{L}. \quad (5.6,b)$$

Dacă se ține seama de ambele condiții (de rezistență și de rigiditate) rezultă două valori diferite pentru sarcina capabilă. Din acestea **se ia în considerare valoarea cea mai mică**.

Din calcul rezultă valori fracționale sau cu multe cifre. Dar, în practica inginerească se folosesc **valori normate** (valori prevăzute în norme sau standarde), ce au puține cifre și sunt, de regulă, întregi. Deci, **inginerul trebuie totdeauna să aleagă valoarea forței, astfel ca bara să reziste, să fie utilizată eficient, iar valoarea forței să fie cea normată**. Astfel;

$$0,8 \cdot P_{\text{capmin}} \leq P \leq 1,05 \cdot P_{\text{capmin}}. \quad (5.7)$$

**c. Dimensionarea** este problema cea mai dificilă, și constă în determinarea dimensiunilor secțiunii transversale ale barei astfel încât aceasta să reziste solicitărilor impuse.

Prima operație, pentru dimensionare, este aflarea efortului normal maxim. Aceasta rezultă din diagrama forței axiale. Apoi, se alege materialul pentru bară și se adoptă valoarea rezistenței admisibile, respectiv a deformației admisibile.

Aria necesară a secțiunii transversale se calculează cu relațiile:

- din condiția de rezistență:

$$A_{\text{nec}} = \frac{N_{\text{max}}}{\sigma_a}, \quad (5.8,a)$$

- din condiția de rigiditate;

$$A_{\text{nec}} = \frac{N_{\text{max}}}{E \cdot \varepsilon_a} \text{ sau } A_{\text{nec}} = \frac{L \cdot N_{\text{max}}}{E \cdot \Delta L_a}. \quad (5.8,b)$$

Ca și la capacitatea de încărcare și aici pot rezulta două valori diferite pentru arie. De această dată se ia în considerare valoarea cea mai mare pentru a fi satisfăcute simultan cele două condiții. De asemenea și aici dimensiunile transversale ale barelor sunt normate și trebuie totdeauna să se aleagă, valoarea standardizată. În acest scop se aleg forma și dimensiunile secțiunilor date în tabele cu profile standardizate (vezi fig. 5.2).

### 5.3. Bare cu variație de secțiune. Secțiune periculoasă

În numeroase cazuri, din motive constructive, aria secțiunii transversale variază în lungul barei. Spre exemplu în figura (5.3,a) este prezentată o platbandă cu secțiunea transversală dreptunghiulară de lățime  $b$  și grosime  $h$  slăbită în secțiunea II-II de o gaură cu diametrul  $d$  și solicitată de o forță axială  $N$ . Tensiunile produse nu au aceeași valoare în fiecare secțiune transversală. Tensiunile în secțiunea I-I, ce se găsește la depărtare de secțiunea slăbită, sunt mai mici decât în secțiunea II-II.

Secțiunea în care iau naștere cele mai mari tensiuni normale se numește **secțiune periculoasă**.

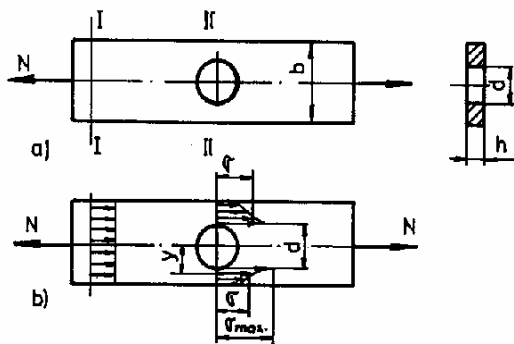


Fig. 5.3

Calculul de rezistență, în acest caz, se face pentru secțiunea periculoasă. Pentru bara din figura 5.3 secțiunea periculoasă este secțiunea II-II, ce are aria minimă. Valoarea medie a tensiunii în această secțiune se determină cu relația:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_{\text{ef}}} = \frac{N}{(b-d) \cdot h},$$

și se numește **tensiune nominală**.

Prin măsurări tensometrice s-au determinat valorile reale ale tensiunilor în bara cu secțiune variabilă. S-a stabilit că tensiunile nu se repartizează uniform pe suprafața secțiunii transversale, ci au o variație parabolică ca în figura (5.3,b), cu valoarea maximă la marginea găurii.

În *Teoria elasticității* se demonstrează că tensiunea în secțiunea periculoasă, la ordonata  $y$  de axa  $Ox$ , este dată de relația:

$$\sigma = \frac{N}{b \cdot h} \cdot \left( 1 + \frac{d^2}{8y^2} + \frac{3d^4}{32y^4} \right),$$

iar tensiunea maximă, la marginea găurii, pentru  $y = \frac{d}{2}$  este:

$$\sigma_{\max} = 3 \frac{N}{b \cdot h} = 3 \cdot \sigma_0,$$

unde:

$$\sigma_0 = \frac{N}{b \cdot h} \text{ este tensiunea nominală din secțiunea neslăbită I-I.}$$

Stări de solicitare asemănătoare se produc și în dreptul altor variații de secțiune.

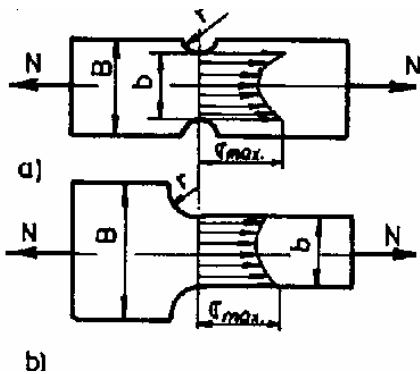


Fig. 5.4

În figura (5.4,a,b) s-au redat alte două exemple de variație a secțiunii transversale. În aceste cazuri tensiunea normală maximă apare la marginea secțiunii transversale, în dreptul creștăturii (fig. 5.4,a) și în dreptul racordării (fig. 5.4,b).

Găurile, racordările, creștăturile, etc. care produc o modificare bruscă a secțiunii barei, influențează distribuția tensiunii normale, se numesc **concentratori de tensiune**.

Pentru cazul general tensiunea normală maximă se determină cu relația:

$$\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_0 = \alpha_k \cdot \frac{N}{A} \quad (5.9)$$

unde:

$\alpha_k > 1$  este **coeficientul teoretic de concentrare al tensiunilor** sau **coeficient de formă**.

Mărimea coeficienților de concentrare a tensiunilor se ia din manualele ingineresti în funcție de dimensiunile secțiunii și de mărimea și configurația concentratorilor.

**Aplicația 5.1.** Pe o bară de secțiune dreptunghiulară de (100x12) mm este asamblată o platbandă prin intermediul a trei nituri de diametru  $d=18$  mm (fig.5.5). Bara este solicitată la întindere de forța  $P = 150$  kN. Se cere să se verifice bara în ipoteza că forța  $P$  se repartizează uniform pe cele 3 nituri, dacă  $\sigma_a = 150$  MPa și  $\alpha_k = 1$ .

**Rezolvare:** Tensiunea maximă din secțiunea I a barei este:

$$\sigma_{\max I} = \frac{N_I}{A_{efI}} = \frac{150 \cdot 10^3}{12 \cdot 100} = 125 \text{ MPa} < \sigma_a.$$

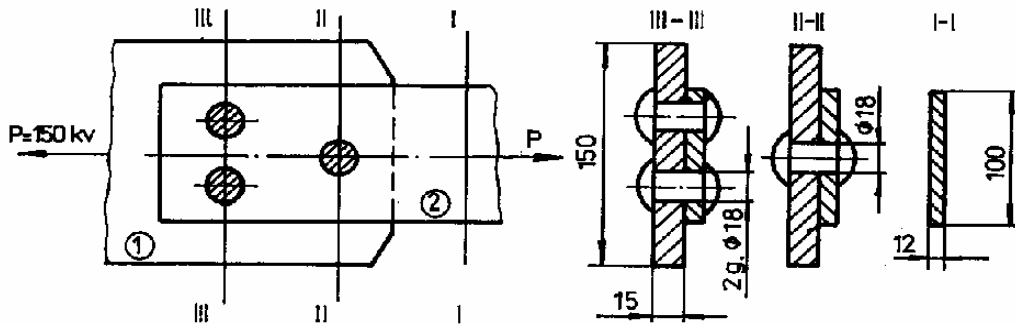


Fig. 5.5

Tensiunea nominală din secțiunea II, rezultă:

$$\sigma_{\max II} = \frac{N_{II}}{A_{efII}} = \frac{150 \cdot 10^3}{12 \cdot 100 - 18 \cdot 12} = 152,4 \text{ MPa} < 1,05 \cdot \sigma_a.$$

Întrucât, prin ipoteză, forța P se repartizează uniform pe cele trei nituri rezultă că o forță  $P/3$  a trecut de la bară la platbandă, prin nitul din secțiunea II. În secțiunea III a mai rămas  $2/3 P$ , astfel că tensiunea normală în bară este:

$$\sigma_{\max III} = \frac{N_{III}}{A_{efIII}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 150 \cdot 10^3}{12 \cdot 100 - 2 \cdot 18 \cdot 12} = 130,2 \text{ MPa} < \sigma_a.$$

Deci, secțiunea periculoasă este secțiunea II-II, unde se verifică condiția impusă ca  $\sigma_{efII} < 1,05 \cdot \sigma_a$ , printr-o depășire a tensiunii admisibile cu numai 1,6 %.

**Aplicația 5.2.** Să se verifice bara din figura 5.7 solicitată la întindere de o forță  $P = 11 \text{ kN}$  știind că  $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$ , neglijând influența concentratorilor de tensiune ( $\alpha_k = 1$ ).

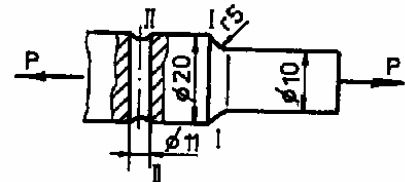


Fig. 5.6

Astfel, tensiunea normală maximă din secțiunea I rezultă:

$$\sigma_{\max I} = \alpha_k \cdot \frac{P}{A_{ef}} = 1 \cdot \frac{4 \cdot 11 \cdot 10^3}{\pi \cdot 10^2} = 140,1 \text{ MPa} < \sigma_a.$$

iar în secțiunea II:

$$\sigma_{\max II} = \alpha_k \cdot \frac{P}{A_{ef}} = 1 \cdot \frac{4 \cdot 11 \cdot 10^3}{\pi \cdot 20^2 - 20 \cdot 11} = 116,8 \text{ MPa} < \sigma_a.$$

Deci bara este corect dimensionată întrucât în ambele secțiuni se respectă condiția (5.5,c).

## 5.4. Calculul barelor verticale luând în considerare și greutatea proprie

În cazul barelor de lungimi mari, care sunt în poziție verticală, calculul la solicitări axiale, se face luând-se în considerare și greutatea proprie.

Să considerăm o bară verticală, prismatică de lungime  $L$  și cu rigiditate  $EA$ , confecționată dintr-un material omogen, cu greutatea specifică  $\gamma$ . Bara este încastrată la un capăt și este solicitată la întindere de o forță  $P$  și de greutatea proprie conform figurii 5.8.

Într-o secțiune oarecare situată la abscisa  $x$  de capătul liber al barei, valoarea forței axiale este:

$$N = P + \gamma \cdot A \cdot x \quad (5.10)$$

și are variație liniară.

Valorile extreme ale forței sunt:

$$N_0 = P,$$

$$N_1 = P + \gamma \cdot A \cdot L.$$

Valoarea tensiunii normale într-o secțiune oarecare este:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} + \gamma \cdot x = \sigma_0 + \gamma \cdot x, \quad (5.11)$$

iar valoarea maximă a tensiunii este în dreptul secțiunii 1:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} + \gamma \cdot L = \sigma_0 + \gamma \cdot L, \quad (5.12)$$

în care tensiunea minimă s-a notat cu  $\sigma_0 = P/A$ .

Din relația (5.12) se obține:

- pentru dimensionare:

$$A_{\text{nec}} = \frac{P}{\sigma_a - \gamma \cdot L}; \quad (5.13)$$

- pentru verificare:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{P}{A_{\text{ef}}} + \gamma \cdot L; \quad (5.14)$$

- pentru calculul capacității de încărcare;

$$P_{\text{cap}} = A_{\text{ef}} \cdot (\sigma_a - \gamma \cdot L). \quad (5.15)$$

Alungirea, respectiv scurtarea barei verticale lungi se obține astfel:

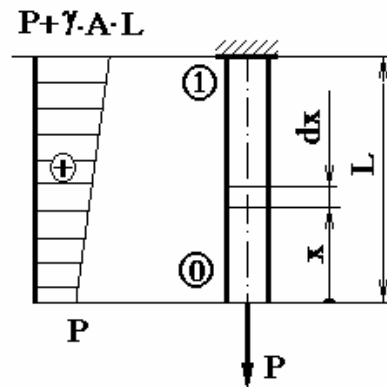


Fig. 5.7



$$\Delta dx = \varepsilon_x \cdot dx = \frac{\sigma}{E} \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \left( \frac{P}{A} + \gamma \cdot x \right) \cdot dx,$$

sau:

$$\Delta L = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \frac{1}{E} \cdot \left( \frac{P}{A} + \gamma \cdot x \right) \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \left( \frac{P \cdot L}{A} + \frac{\gamma \cdot L^2}{2} \right) = \frac{\left( P + \frac{G}{2} \right) \cdot L}{E \cdot A} \quad (5.16)$$

în care  $G = \gamma \cdot A \cdot L$ , este greutatea barei.

În practica inginerescă se utilizează bare cu variații în trepte, eficient calculate. În acest mod, cu toate că forța axială crește de la valoarea  $P$  la  $P+G$ , tronsoanele se pot realiza astfel ca tensiunile efective să fie cuprinse în domeniul:

$$1,05 \cdot \sigma_a \geq \sigma_{ef} \geq 0,8 \cdot \sigma_a.$$

Pentru exemplificare se consideră bara din figura 5.8, formată din trei tronsoane cu lungimile  $L_1, L_2, L_3$ . Dimensionarea barei, ținând seama de condiția de rezistență, se face astfel:

$$N_0 = P, \quad A_{1nec} = \frac{P}{\sigma_a - \gamma_1 \cdot L_1}.$$

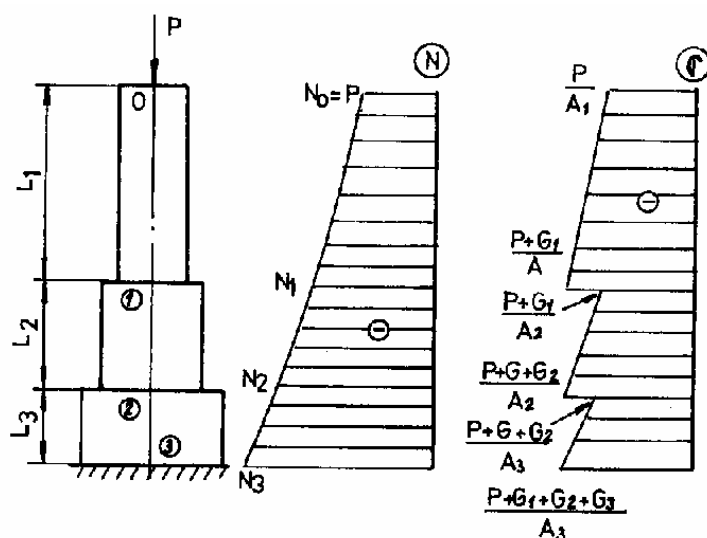


Fig. 5.8

Se adoptă  $A_1$  și apoi se calculează:

$$N_1 = P + G_1 = P + \gamma_1 \cdot A_1 \cdot L_1, \quad A_{2nec} = \frac{N_1}{\sigma_a - \gamma_2 \cdot L_2},$$

apoi se adoptă  $A_2$ .

Generalizând, dimensionarea se face cu formula;

$$A_{inec} = \frac{P + \sum_0^{i-1} \gamma_i \cdot A_i \cdot L_i}{\sigma_a - \gamma_i \cdot L_i} = \frac{P + \sum_0^{i-1} G_i}{\sigma_a - \gamma_i \cdot L_i}. \quad (5.17)$$

Dacă tronsoanele sunt realizate din materiale diferite în formula (5.18) se ia valoarea tensiunii admisibile cea mai mică din valorile pentru cele două materiale în contact (a se vedea § 5.5.1).

Efortul maxim la contactul dintre cele două tronsoane este:

$$N_i = P + \sum_0^{i-1} \gamma_i \cdot A_i \cdot L_i = P + \sum_0^{i-1} G_i . \quad (5.18)$$

Alungirea respectiv scurtarea barei formate din tronsoane rezultă prin însumarea alungirilor (scurtărilor) fiecărui tronson, Astfel, prin aplicarea succesivă a formulei (5.16) se obține:

$$\Delta L = \sum_1^i \frac{N_{i-1} + \frac{G_i}{2}}{E_i \cdot A_i} \cdot L_i . \quad (5.19)$$

## 5.5. Presiunea de contact

În calculele de rezistență la compresiune este necesară determinarea modului cum sunt transmise sarcinile aplicate, adică a modului de considerare a **presiunii de contact**. Aceasta este considerată o tensiune normală pe suprafața de contact, ce se dezvoltă pe suprafața de aplicare a sarcinilor. Dacă presiunea de contact atinge valori prea mari, ce depășesc limita admisibilă a unui material în contact, se produce distrugerea prin strivire, a elementului respectiv. De aceea, când forța se transmite între două (ER) din materiale diferite se va ține seama în calcul, de rezistența admisibilă cea mai mică la compresiune a materialelor în contact.

Relațiile de calcul ale presiunii de contact diferă în funcție de felul suprafeței de contact (plană, cilindrică, sferică, etc).

### 5.5.1. Suprafața plană de contact

Pentru **suprafețe plane de contact se admite o distribuție uniformă a presiunii de contact**, egală cu tensiunea normală pe această suprafață. În acest caz rezistența la strivire este;

$$p_{ef} = \frac{P}{A} \leq p_a = \sigma_{ac} , \quad (5.20)$$

în care  $\sigma_{ac}$  este rezistența admisibilă la compresiune, cea mai mică, a materialelor în contact.

**Aplicația 5.3.** Să se verifice stâlpul din figura 5.9, știind că este confecționat din aluminiu cu  $p_{aAL} = 45$  MPa. Acesta apasă pe o placă de oțel cu  $p_{aOL} = 100$  MPa care apoi se sprijină pe un bloc de beton cu  $p_{abet} = 20$  MPa și totul pe pământ. Presiunea admisibilă pentru pământ este de  $p_{apam} = 2$  MPa.

Se cunoaște;  $\gamma_{AL} = 27$  kN/m<sup>3</sup>,  $\gamma_{OL} = 78,5$  kN/m<sup>3</sup> și  $\gamma_{beton} = 22$  kN/m<sup>3</sup>.

**Rezolvare:** Forța la contactul dintre stâlpul de aluminiu și placa de oțel rezultă:

$$N_2 = P + \gamma_{AL} \cdot V_{AL} = 2000 + 27 \cdot \frac{\pi \cdot 0,25^2}{4} \cdot 8 = 2011 \text{ kN},$$

iar presiunea de contact este:

$$P_{s2} = \frac{N_2}{A_{ef}} = \frac{4 \cdot 2011 \cdot 10^3}{250^2} = 40,96 \text{ MPa} < P_{aAL},$$

Forța la contactul dintre oțel și beton va fi:

$$N_3 = N_2 + \gamma_{OL} \cdot V_{OL} = 2011 + 78,5 \cdot \frac{\pi \cdot 0,325^2}{4} \cdot 0,02 = 2011 \text{ kN}.$$

**Observații:** Greutatea plăcii de oțel este neglijabilă față de cea a stâlpului și nu se ia în considerare.

Presiunea de contact în 2 este:

$$P_{s3} = \frac{N_3}{A_{ef}} = \frac{4 \cdot 2011 \cdot 10^3}{325^2 \cdot \pi} = 24,24 \text{ MPa} < P_{aBet}.$$

Forța axială dintre beton și pământ se obține:

$$N_4 = N_3 + \gamma_{bet} \cdot V_{bet} = 2011 + 22 \cdot 1,2^2 \cdot 1 = 2083 \text{ kN},$$

iar presiunea de contact este:

$$P_{s4} = \frac{N_4}{A_{ef}} = \frac{2083 \cdot 10^3}{1200^2} = 1,419 \text{ MPa} < P_{aPam}.$$

Deci, calculele de rezistență pentru acest stâlp sunt corecte, deoarece în toate zonele de contact nu se depășește presiunea admisibilă a materialului celui mai puțin rezistent. Se mai observă că greutatea plăcii de oțel este neglijabilă față de sarcină, greutatea stâlpului și greutatea fundației.

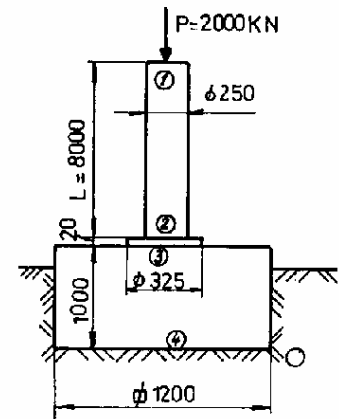


Fig. 5.9

## 5.5.2. Suprafețe cilindrice în contact

În cazul îmbinărilor cu nituri, bolțuri, buloane, etc. suprafețele în contact dintre (ER) au forme cilindrice.

În figura (5.10,a) se consideră o îmbinare cu un nit. Forța  $P$  se transmite de la ER 2 la 3 prin intermediul nitului 1 de diametru  $D$  și lungime  $2L$ .

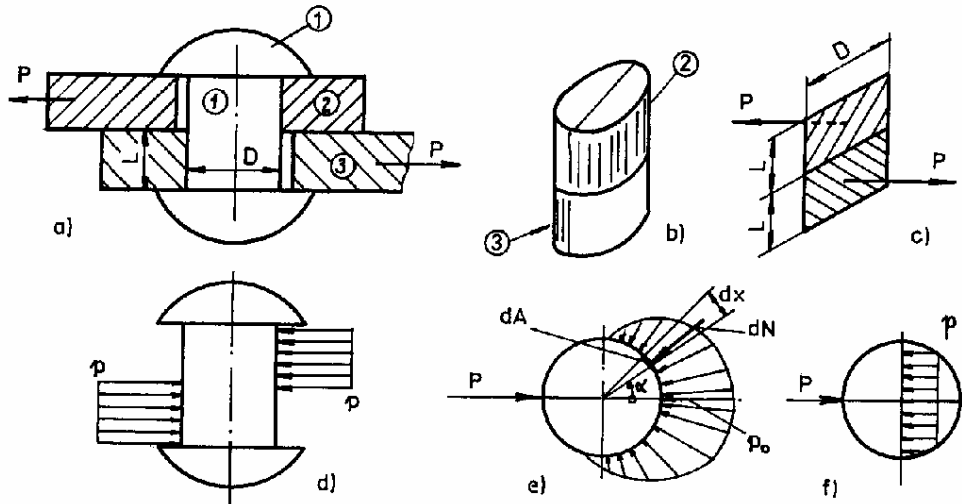


Fig. 5.10

Dacă se presupune că intensitatea forței este aceeași pe toată grosimea  $L$  a elementelor 2 respectiv 3 atunci pe fiecare suprafață elementară,  $dA = L \cdot \frac{D}{2} \cdot d\alpha$ , se va transmite o forță elementară normală, (fig. 5.10);

$$dN = p \cdot dA = p \cdot L \cdot \frac{D}{2} \cdot d\alpha,$$

ce depinde de distribuția presiunii de contact.

Distribuția reală depinde de elementul de imbinare (nit sau șurub) modul de asamblare (nedemontabilă sau demontabilă) și se poate determina experimental.

Dacă se consideră distribuția  $p = p_0 \cdot \cos\alpha$ , ce aproximează foarte bine pe cea reală, atunci din ecuația de echivalență dintre forță și presiune se obține;

$$P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dN \cdot \cos\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (p \cdot dA) \cdot \cos\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( p_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{L \cdot D}{2} \cdot d\alpha \right) \cdot \cos\alpha = \frac{\pi}{4} \cdot L \cdot D \cdot p_0,$$

din care rezultă valoarea presiunii maxime în contact,

$$p_0 = \frac{4P}{D \cdot L \cdot \pi} = 1,273 \cdot \frac{P}{D \cdot L}. \quad (5.21)$$

În calculele ingineresti se consideră că forța  $P$  se distribuie uniform pe suprafața  $D \cdot L$  (fig. 5.10,e, f), adică:

$$P = p_a \cdot D \cdot L \quad \text{sau} \quad p_{\max} = \frac{P}{D \cdot L}. \quad (5.22)$$

Presiunea de contact admisibilă, în cazul suprafețelor cilindrice fixe, se ia:

$$p_a = (1 \dots 1,5) \cdot \sigma_{ac} \quad (5.23)$$

iar dacă cele două piese cilindrice trebuie să aibă o mișcare relativă una față de alta, cum este fusul în lagăr, se ia:

$$p_a = (0,5 \dots 0,8) \cdot \sigma_{ac} \quad (5.22,a)$$

Astfel, pentru OL 37 cu  $\sigma_{ac} = \sigma_a = 150 \text{ N/mm}^2$ , presiunea admisibilă se poate lua între valorile  $p_a = 75 \dots 225 \text{ MPa}$ .

**Aplicata 5.4.** Să se verifice la strivire îmbinarea cu nituri de la aplicația 5.1 (fig. 5.5) dacă  $p_a = 1,5 \sigma_a = 1,5 \cdot 150 = 225 \text{ MPa}$ .

**Rezolvare:** Forța pe un nit, ținând seama de ipoteza că forța se distribuie uniform pe fiecare nit (a se vedea § 7.4), este:

$$P_1 = \frac{P}{3} = \frac{150}{3} = 50 \text{ kN}.$$

Presiunea de contact este:

$$p_{ef} = \frac{P_1}{D \cdot L} = \frac{50 \cdot 10^3}{18 \cdot 12} = 231,5 \text{ MPa}.$$

Întrucât  $p_{ef} = 231,5 < 1,05 \cdot p_a = 236,3 \text{ MPa}$ , ÎMBINAREA REZISTĂ.

### 5.5.3. Suprafețe mici în contact

Asemenea suprafețe există la contactul dintre bilele sferice, cilindrice, butoiaș, etc. și suprafețele de așezare ale acestora. În aceste cazuri, datorită suprafețelor de rezemare foarte mici, prin care se transmit forțele, se produc presiuni de contact deosebit de mari. Sub acțiunea forțelor de contact mari cele două corpuri se deformează local (se turtesc).

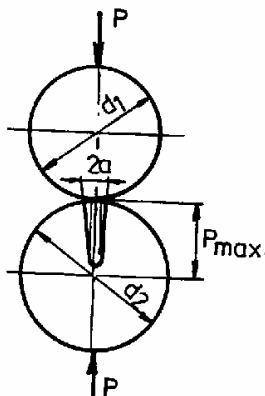


Fig. 5.11

În cazul a două bile sferice, apăsate una către cealaltă cu forța  $P$ , acestea se deformează, obținându-se o suprafață circulară de contact, cu diametrul  $2a$  (fig.5.11).

Presiunea maximă de contact a fost stabilită de H. Hertz, luând în considerare următoarele ipoteze:

- diametrul  $2a$ , al suprafeței de contact, este mic în comparație cu diametrele  $d_1$  și  $d_2$  ale bilelor;
- materialele celor două corpuri au deformații liniar elastice;
- presiunile de contact sunt normale pe suprafața de contact.

În acest caz presiunea maximă dezvoltată pe axa centrelor celor două bile se calculează cu formula dedusă de H. Hertz (cu ajutorul teoriei elasticității):

$$p_{\max} = 0,975 \cdot \sqrt[3]{P \cdot \left( \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \right)^2 \cdot \left( \frac{d_1 + d_2}{d_1 \cdot d_2} \right)^2}, \quad (5.24)$$

iar dacă cele două corpuri sunt confecționate din același material;

$$p_{\max} = 0,62 \cdot \sqrt[3]{P \cdot E^2 \cdot \left( \frac{d_1 + d_2}{d_1 \cdot d_2} \right)^2}. \quad (5.24,a)$$

În anexa 5 de la sfârșitul cursului se dau și formule de calcul ale presiunii maxime de contact pentru cele mai frecvente cazuri întâlnite în practica inginerescă.

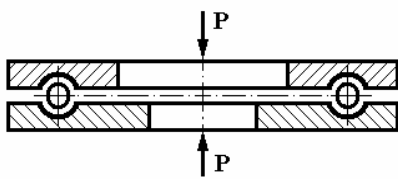


Fig. 5.12

Experimental s-a constatat că presiunea maximă de contact poate depăși cu mult limita de curgere a materialului fără ca ER să se distrugă. Fenomenul se explică prin faptul că în zona centrală de contact, unde se atinge  $p_{\max}$ , materialul se află în stare triaxială de compresiune uniformă (vezi § 3.7).

Valorile presiunii admisibile în cazul contactului pe suprafețe foarte mici, pentru fonte și oțeluri se dau în tabelul 5.1.

Tabelul 5.1.

Materialul	$\sigma_r$ [MPa]	$p_a$ [MPa]
Fonta	900 - 1400	800 - 1300
Oțel carbon călit	480 - 800	850 - 1400
Oțel aliat călit	700 - 1800	1200 - 1600
Oțel de rulmenți	-	3800

**Aplicația 5.5.** Să se calculeze forța capabilă care o poate prelua un rulment de presiune cu 8 bile (fig. 5.12) cu diametru  $d_1 = 6$  mm, ce are căile de rulare concave cu raza  $R = \frac{d_2}{2} = 8$  mm. Se cunoaște  $E = 210$  GPa și  $p_a = 3,8$  GPa.

**Rezolvare:** Utilizând formula din anexa 5 (nr. 2) pentru oțel de rulmenți se obține:

$$P_{\text{cap}} = n \cdot \left( \frac{p_{\max}}{0,62} \right)^3 \cdot \left( \frac{d_1 \cdot d_2}{d_2 - d_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{E^2} =$$

$$= 8 \cdot \left( \frac{3,8}{0,62} \right)^3 \cdot \left( \frac{6 \cdot 8}{8 - 6} \right)^2 \cdot \frac{1}{210^2} = 24,06 \text{ kN}$$

Se adoptă:  $P = 24$  kN.

## 5.6. Sisteme de bare static nedeterminate

### 5.6.1. Noțiuni generale

Până acum s-au analizat eforturile și tensiunile dintr-o bară static determinată. În practica inginerescă sunt ansamble și subansamble formate din sisteme de bare. Aceste sisteme pot fi static determinate sau static nedeterminate.

La sistemele static determinate reacțiunile, respectiv eforturile din secțiune, se pot determina din ecuațiile de echilibru. În acest caz numărul ecuațiilor statice este egal cu numărul necunoscutelor.

Când numărul necunoscutelor (reacțiuni sau/și eforturi) este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru static, sistemul se numește **static nedeterminat**. Diferența dintre numărul necunoscutelor și numărul de ecuații statice, constituie **gradul de nedeterminare al sistemului**. Pentru rezolvare în acest caz, **se adaugă la ecuațiile statice un număr de ecuații de deformație egal cu gradul de nedeterminare** al sistemului. Aceste ecuații suplimentare se obțin din analiza aspectului geometric și de compatibilitate al sistemului de bare.

Sistemele static nedeterminate sollicitate axial pot fi cauzate de:

- legături ce împiedică deformarea produsă de sarcini sau de modificarea temperaturii barelor;
- eforturi (tehnologice sau de asamblare) ce se produc în sistemele de bare;
- utilizarea în construcția unei bare a mai multor materiale cu caracteristici fizico-mecanice diferite.

În toate aceste cazuri problemele static nedeterminate se pot rezolva parcurgând următoarele trei aspecte:

a) **aspectul static**; scriind ecuațiile de echilibru static se stabilesc necunoscutele sistemului și se află gradul de nedeterminare;

b) **aspectul geometric** - se scrie un număr de ecuații de deformații egal cu gradul de nedeterminare;

c) **aspectul fizic** - se exprimă deformațiile de la punctul b) în funcție de eforturile sau tensiunile din bară.

Astfel după parcurgerea celor trei aspecte, din aspectul static și cel fizic se obțin ecuațiile necesare care prin rezolvare, dau soluțiile problemei static nedeterminate în eforturi, în tensiuni sau în deformații.

## 5.6.2. Bare având deformațiile împiedicate de legături

### Aplicația 5.6. Bara încastrată (sau articulată), la cele două capete (fig. 5.13).

Se consideră bara dreaptă, prismatică încastrată sau articulată la cele două capete și încărcată cu sarcina axială  $P$  într-un punct situat la distanța  $a$  de încastrarea 1 (respectiv la  $b$  de încastrarea 2)

**Rezolvare:** Reacțiunile în cele două reazeme sunt  $H_1$  și  $H_2$ .

a) Aspectul static:

$H_1 + H_2 = P$  (sistem simplu static nedeterminat);

b) Aspectul geometric:

$\Delta a + \Delta b = 0$  (deformația totală a barei trebuie să fie nulă):

c) Aspectul fizic:

$$\frac{H_1 \cdot a}{E_1 \cdot A_1} + \frac{H_1 - P}{E_2 \cdot A_2} \cdot b = 0,$$

din care se obține:

$$H_1 = \frac{P}{1 + \frac{a}{b} \cdot \frac{E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1}} \quad \text{și apoi} \quad H_2 = P - H_1.$$

Având valorile reacțiilor se poate trasa diagrama de variație a forțelor axiale și apoi se poate efectua calculul de rezistență.

Dacă  $E_1 \cdot A_1 = E_2 \cdot A_2 = E \cdot A$  și  $L = a + b$ , atunci;

$$H_1 = \frac{b}{L} \cdot P \quad \text{și} \quad H_2 = \frac{a}{L} \cdot P.$$

### Aplicația 5.7. Sistem de bare paralele.

Se consideră bara de mare rigiditate (1)-(3) suspendată prin trei bare verticale, prismatice de lungimi și rigidități diferite. Sarcina verticală  $P$  acționează la distanța  $c$  de punctul 3 (fig. 5.14).

**Rezolvare:**

a) Aspectul static (ecuațiile de echilibru sunt):

$$N_1 + N_2 + N_3 = P,$$

$$N_1 \cdot (a + b) + N_2 \cdot b = P \cdot c.$$

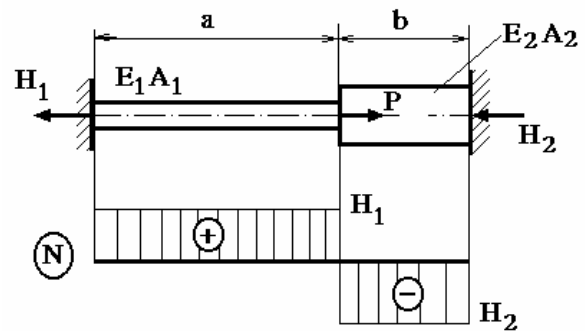


Fig. 5.13

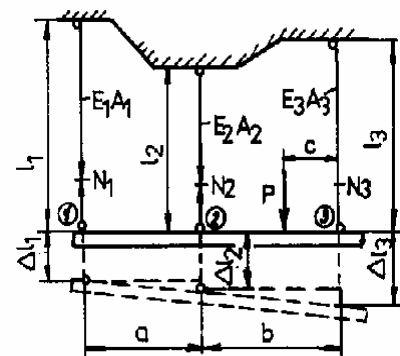


Fig. 5.14



b) Aspectul geometric, corespunzător stării de deformație al barelor este:

$$\frac{\Delta L_2 - \Delta L_1}{a} = \frac{\Delta L_3 - \Delta L_2}{b}.$$

c) Aspectul fizic (adică exprimând alungirile funcție de eforturi) se obține:

$$\frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} \cdot \frac{b}{a} - \frac{N_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} \cdot \frac{a+b}{a} + \frac{N_3 \cdot L_3}{E_3 \cdot A_3} = 0.$$

Această ultimă ecuație împreună cu cele două ecuații de echilibru constituie un sistem de trei ecuații din care se pot determina eforturile  $N_1$ ,  $N_2$  și  $N_3$  din bare.

### **Aplicația 5.8. Sistem de bare articulate, simetrice.**

Fie sistemul de bare prismatice, coplanare, articulate și acționate în A de forța P. Bara mediană are lungimea L și rigiditatea  $E \cdot A$  iar cele laterale  $L = L/\cos\alpha$  și respectiv  $E_1 \cdot A_1$  (fig. 5.15).

#### **Rezolvare:**

a) Aspectul static:

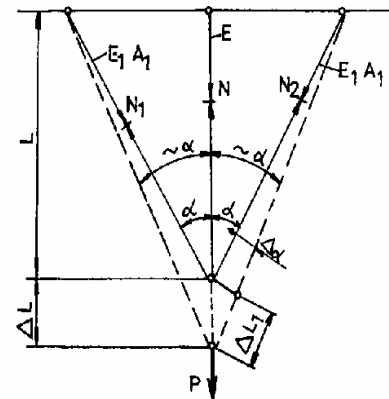
$$N_1 \cdot \sin \alpha - N_2 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N + (N_1 + N_2) \cdot \cos \alpha = P.$$

b) Aspectul geometric: neglijând modificarea unghiului  $\alpha$  după deformație (conform ipotezei deformațiilor mici)  $\Delta\alpha$  este foarte mic față de unghiul  $\alpha$ . Între deformațiile  $\Delta L$  și  $\Delta L_1$  există relația:

$$\Delta L_1 = \Delta L \cdot \cos \alpha.$$

c) Aspectul fizic se scrie:



**Fig. 5.15**

$$\frac{N_1 \cdot \frac{L}{\cos \alpha}}{N_1 \cdot A_1} = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \cdot \cos \alpha.$$

Din cele trei ecuații rezultă:

$$N = \frac{P}{1 + \frac{2E_1 \cdot A_1}{E \cdot A} \cdot \cos^3 \alpha}, \quad N_1 = N_2 = \frac{P - N}{2 \cdot \cos \alpha}.$$

Dacă  $E \cdot A = E_1 \cdot A_1$  atunci se obține:

$$N = \frac{P - N}{1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha} \quad \text{și} \quad N_1 = N_2 = \frac{P \cdot \cos^2 \alpha}{1 + \cos^3 \alpha}.$$

Din formulele de mai sus se observă că  $N > N_1$ , astfel că sarcina capabilă se determină, în acest caz, numai funcție de N:

$$P_{\text{cap}} = (1 + 2 \cos^3 \alpha) \cdot N_{\text{cap}} = (1 + 2 \cos^3 \alpha) \cdot A \cdot \sigma_a.$$

### 5.6.3. Bare cu eforturi inițiale

Lungimile barelor din sistemele static nedeterminate se stabilesc pe considerente geometrice. Dacă lungimile unor bare diferă de valorile nominale conform toleranțelor de execuție ale reperelor, atunci acestea se pot monta numai după ce au fost lungite sau scurtate forțat. Prin aceasta se introduc eforturi suplimentare în sistem, rezultate din montajul forțat. Un sistem de bare ce conține eforturi înainte de a fi acționat de sarcinile pentru care a fost construit, se numește **sistem cu eforturi inițiale**. Valorile eforturilor inițiale se pot determina adăugând la ecuațiile de echilibru, ecuații de deformație obținute din studiul geometriei sistemului.

În aplicațiile analizate mai jos **valorile impreciziilor de montaj, respectiv ale deformațiilor rezultate la montaj sunt mici, astfel că acestea sunt liniar elastice.**

#### Aplicația 5.9. Sisteme de bare articulate concurente cu imperfecțiune la montaj.

La sistemul plan de bare articulate din figura 5.16 bara centrală este mai scurtă cu lungimea  $a$ . În urma montajului forțat, în bara mediană se va produce o forță axială de întindere iar în cele laterale forțe axiale de compresiune.

*Rezolvare:*

a) Aspectul static:

$$N_1 \cdot \sin \alpha = N_2 \cdot \sin \alpha,$$

$$N = (N_1 + N_2) \cdot \cos \alpha.$$

b) Aspectul geometric:

$$\Delta L + \frac{\Delta L_1}{\cos \alpha} = a.$$

c) Aspectul fizic:

$$\frac{N \cdot L}{E \cdot A} = \frac{N_1 \cdot L}{E_1 \cdot A_1 \cdot \cos^2 \alpha} = a.$$

Din cele trei ecuații în eforturi se obține:

$$N = \frac{a \cdot E \cdot A}{L + \frac{E \cdot A}{2E_1 \cdot A_1} \cdot \frac{L}{\cos^3 \alpha}},$$

$$N_1 = N_2 = \frac{N}{2 \cos \alpha}.$$

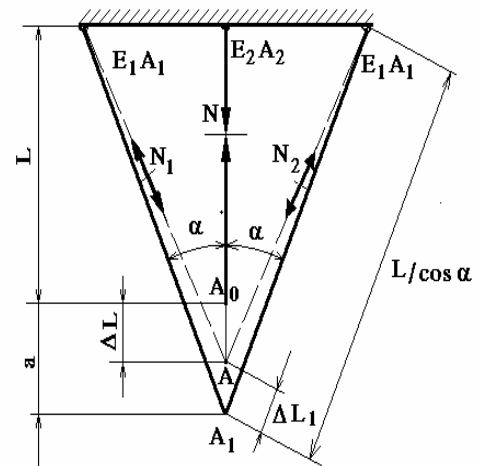


Fig. 5.16

### 5.6.4. Bare cu secțiuni neomogene

În construcțiile ingineresti se utilizează (ER) alcătuite din două sau mai multe materiale, ce au caracteristici fizico-mecanice diferite. Elementele componente ale barei formează un sistem ce se comportă ca un tot omogen. Exemple de asemenea (ER) sunt: stâlpi din beton armat, cablurile bimetalice etc.

În figura 5.17 se dă o bară prismatică alcătuită din trei materiale diferite ( $E_1 \cdot A_1$ ,  $E_2 \cdot A_2$ ,  $E_3 \cdot A_3$ ) solidarizate.

În acest caz:

a) aspectul static este:

$$N_1 + N_2 + N_3 = P,$$

b) aspectul geometric este:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3,$$

c) aspectul fizic va fi:

$$\frac{N_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_3}{E_3 \cdot A_3}.$$

Prin rezolvarea ecuațiilor în eforturi rezultă:

$$N_1 = \frac{P \cdot E_1 \cdot A_1}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3}, \quad N_2 = \frac{P \cdot E_2 \cdot A_2}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3},$$

$$N_3 = \frac{P \cdot E_3 \cdot A_3}{E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 + E_3 \cdot A_3}.$$

Generalizând se obține formula pentru eforturi:

$$N_i = \frac{P \cdot E_i \cdot A_i}{\sum E \cdot A} \quad (5.25)$$

și din aceasta rezultă tensiunea în materialul i al barei:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} = \frac{P \cdot E_i}{\sum A \cdot E}. \quad (5.26)$$

Dacă aspectul fizic se scrie sub forma:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_3}{E_3},$$

din aceasta se obțin relațiile:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \cdot \frac{E_1}{E_2} = \sigma_3 \cdot \frac{E_1}{E_3}, \quad \sigma_2 = \sigma_1 \cdot \frac{E_2}{E_1} = \sigma_3 \cdot \frac{E_2}{E_3}, \dots \quad (5.27)$$

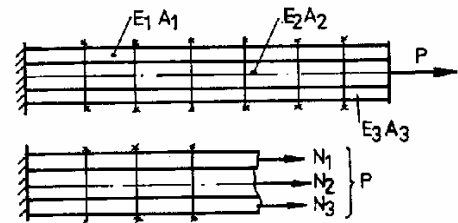


Fig. 5.17

Deci, tensiunea ce se produce într-un material depinde de tensiunile din celelalte materiale și de modulele de elasticitate ale acestor materiale și nu depinde de aria secțiunilor.

Ca atare, pentru a rezulta construcții eficiente este necesar să se îndeplinească simultan condițiile:

$$\sigma_{1ef} = \sigma_{1a'} \quad \sigma_{2ef} = \sigma_{2a'} \quad \sigma_{3ef} = \sigma_{3a'} \text{ etc.}$$

ce se poate realiza numai dacă:

$$\frac{\sigma_{1a}}{E_1} = \frac{\sigma_{2a}}{E_2} = \frac{\sigma_{3a}}{E_3}. \quad (5.28)$$

Această condiție nu se poate îndeplini decât în mod excepțional.

Relația (5.28) se utilizează pentru determinarea tensiunilor admisibile ale celorlalte materiale. Valorile **tensiunilor admisibile de calcul se determină ținând cont că acestea pot fi egale sau inferioare valorii tensiunii admisibile date pentru materialul respectiv.**

**Aplicația 5.10.** Să se determine sarcina capabilă pentru un cablu format din 19 fire de oțel ( $\sigma_{a1} = 200$  MPa,  $E_1 = 120$  GPa) și 90 fire de aluminiu ( $\sigma_{a2} = 30$  MPa,  $E_2 = 70$  GPa). Firele au diametrul de  $d = 3$  mm.

**Rezolvare:** Tensiunile admisibile de calcul sunt:

$$\sigma_{a2} = 30 \text{ MPa}, \quad \sigma'_{a1} = \sigma_{a2} \cdot \frac{E_1}{E_2} = 30 \cdot \frac{210}{70} = 90 \text{ MPa}.$$

Se observă că pornind de la  $\sigma_{a1} = 200$  MPa se obține  $\sigma'_{2a} = 30$  MPa, deci inacceptabil.

Acum se poate calcula sarcina capabilă cu relația:

$$P = N'_{1cap} + N_{2cap} = \sigma'_{a1} \cdot A_1 + \sigma_{a2} \cdot A_2 = (90 \cdot 19 + 30 \cdot 90) \times \frac{3^2 \pi}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow P = 31170 \text{ N}.$$

Se adoptă:  $P = 30$  kN.

### 5.6.5. Eforturi datorită dilatărilor împiedicate

O bară dreaptă de lungime  $L$ , ce se poate dilata liber, prin încălzire uniformă se lungește (fig. 5.18,a) cu

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta t \quad (5.29)$$

în care  $\alpha$  este coeficientul de dilatare liniară (vezi anexa 2), iar  $\Delta t = t - t_0$  este creșterea temperaturii.

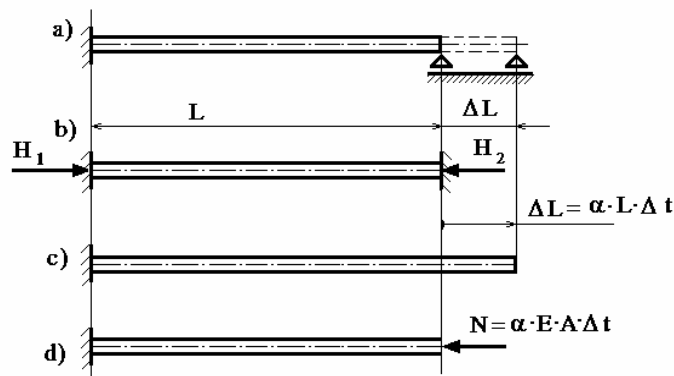


Fig. 5.18

Alungirea specifică din bară este;

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta t \quad (5.30)$$

Când bara are articulații fixe sau este încastrată la ambele capete (fig. 5.20,b), ce împiedică dilatarea, în bară se produce o forță axială de compresiune. Această forță trebuie să scurteze bara cu lungirea produsă de creșterea temperaturii (fig. 5.18,c și d), adică cu:

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta t \cdot L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A},$$

din care se obține formula pentru forța axială de compresiune:

$$N = \alpha \cdot E \cdot A \cdot \Delta t \quad (5.31)$$

Ca atare în bară va exista tensiunea:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \alpha \cdot E \cdot \Delta t. \quad (5.32)$$

Când bara este formată din mai multe tronsoane prismate din materiale diferite ( $L_1, A_1, E_1, A_1, L_2, A_2, E_2, A_2, \dots$ ), forța axială din bară rezultă:

a) Din aspectul static;

$$N = N_1 = N_2 = N_3 = \dots \quad (5.33)$$

b) Din aspectul geometric se obține relația:

$$(\Delta L)_T - (\Delta L)_N = a \quad (5.34)$$

în care a este spațiul destinat dilatării (fig. 5.21).

c) Aspectul fizic pentru acest caz este:

$$\sum \alpha \cdot L \cdot \Delta t - \sum \frac{N \cdot L}{E \cdot A} = a. \quad (5.35)$$

Relațiile (5.33) și (5.34) sunt necesare și suficiente pentru determinarea eforturilor în barele cu dilatare împiedicată.

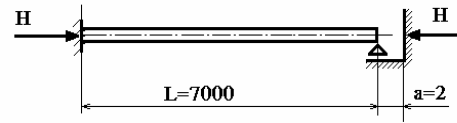
**Aplicația 5.11.** Profilul I20 ( $A = 35,5 \text{ cm}^2$ ,  $E=210 \text{ GPa}$ ,  $\alpha=12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$ ) s-a montat ca în figura 5.19, la temperatura de  $5^\circ \text{C}$  și s-a lăsat un spațiu de dilatare  $a = 2 \text{ mm}$ . Să se determine efortul și tensiunea din bară la temperatura de  $45^\circ \text{C}$ .

**Rezolvare:**

Spațiul necesar dilatării libere este:

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta t \cdot L = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 7000 = 3,36 \text{ mm.}$$

Întrucât  $\Delta L = 3,36 \text{ mm} > a = 2 \text{ mm}$ , dilatarea este împiedicată.



**Fig. 5.19**

Deci sistemul este static nedeterminat. Ecuațiile din cele trei aspecte sunt:

a)  $N = H_1 = H_2$ ,

b)  $(\Delta L)_T - (\Delta L)_N = a$ ,

c)  $\alpha \cdot L \cdot \Delta t - \frac{N \cdot L}{E \cdot A} = a$ .

din care rezultă:

$$H = N = \left( \alpha \cdot \Delta t - \frac{a}{L} \right) \cdot E \cdot A = \left( 12 \cdot 10^{-6} \cdot 40 - \frac{2}{7000} \right) \cdot 210 \cdot 3350 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = 136,7 \text{ kN,}$$

$$\sigma_{\text{ef}} = \frac{N}{A} = \frac{136,7 \cdot 10^3}{3350} = 40,8 \text{ MPa} < \sigma_a = 150 \text{ MPa.}$$

**Observație:** Eforturile și tensiunile ce iau naștere datorită dilatării împiedicate sunt suplimentare și se însumează cu cele produse de sarcinile utile.

## 5.7. Întrebări - test

1. Ce tensiuni apar pe secțiunea unei bare supusă la tracțiune? Cum sunt ele repartizate?
2. Definiți modulul de rigiditate la tracțiune – compresiune.
3. Ce este contracția transversală?
4. Ce înțelegeți prin secțiune periculoasă?
5. Care sunt principalele puncte ale curbei caracteristice  $\sigma - \epsilon$ ?
6. Definiți modulul de elasticitate E.
7. Care este deosebirea între tracțiune și compresiune?
8. Ce este un sistem static nedeterminat? Ce este gradul de nedeterminare și cum se calculează?
9. Cum influențează temperatura sistemele static determinate? Dar pe cele static nedeterminate?
10. Cum influențează imperfecțiunile de montaj eforturile și tensiunile din bare la sisteme static determinate?
11. Ce se înțelege printr-un sistem de bare static determinat?

## 5.8. Probleme propuse

1. Să se dimensioneze barele din figura 5.20 știind că sunt confecționate din oțel cu  $\sigma_a=150$  MPa. După dimensionare să se determine lungirea sau scurtarea acestora.

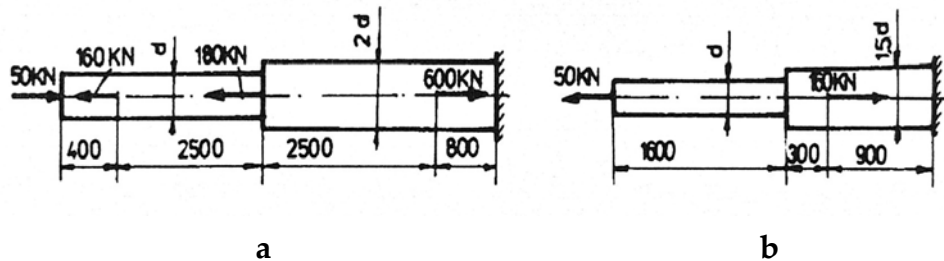


Fig. 5.20

2. Bara orizontală de rigiditate foarte mare prezentată în figura 5.21 este articulată în punctul B și susținută de tirantul AC. Ascupra structurii este aplicată pe verticală o sarcină  $P=60$  kN. Se cere să se dimensioneze tirantul AC știind că acesta trebuie confecționat din două corniere cu laturi egale și să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului D.

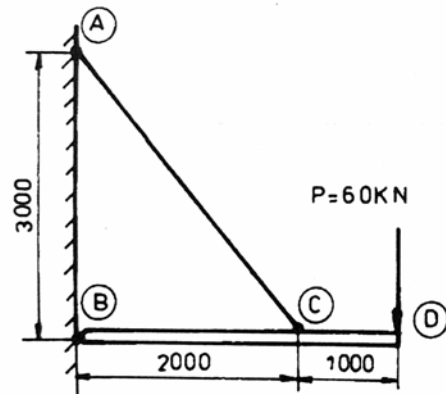


Fig. 5.21

3. O grindă rigidă AB este susținută în poziție orizontală (ca în figura 5.22) de două fire (unul de oțel și celălalt de cupru). Se cere să se determine poziția sarcinii  $P=6$  kN astfel încât după încărcare bara să rămână tot orizontală. Pentru această poziție, să se determine tensiunile ce iau naștere în cele două fire, precum și deplasarea pe verticală a barei AB.

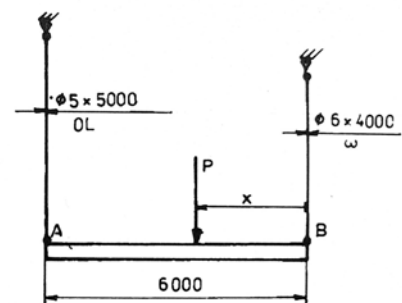


Fig. 5.22

4. O bară de lungime  $L = 800$  m solicitată la tracțiune de o forță  $P = 200$  kN se realizează în două variante: cu secțiune constantă și cu secțiune în două trepte (fig. 5.23). Se cere să se găsească relația dintre lungimile  $l_1$  și  $l_2$  astfel, încât economia de material ce se obține între cele două variante să fie maximă. Se cunosc:  $\gamma=78,5$  kN/m<sup>3</sup> și  $\sigma_a=140$  MPa.



5. O bară din OL de secțiune inelară (fig. 5.24), de lungime  $L$ , este solicitată la tracțiune de o sarcină  $P=400$  kN. Știind că se cunosc  $\gamma=78,5$  kN/m<sup>3</sup> și  $\sigma_a=140$  MPa, se cere să se determine:

- dimensiunile secțiunii transversale ale barei pentru  $L = 306$  m;
- lungirea barei într-o secțiune  $x$  și lungirea totală.

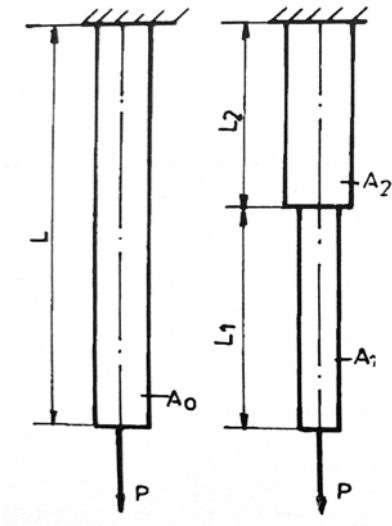


Fig. 5.23

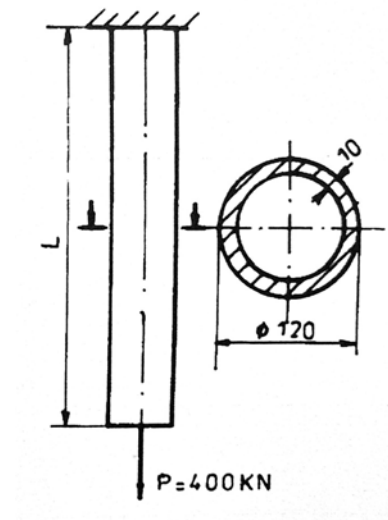


Fig. 5.24

6. Să se dimensioneze stâlpul din figura 5.25 știind că este realizat din fontă cu  $\sigma_{aFo} = 100$  MPa,  $\gamma_{Fo} = 77$  kN/m<sup>3</sup>, ce se sprijină pe o placă de oțel cu  $\sigma_{aOL} = 150$  MPa,  $\gamma_{OL} = 78,5$  kN/m<sup>3</sup>, acestea pe un bloc de beton cu  $\sigma_{abet} = 25$  MPa,  $\gamma_{bet} = 40$  kN/m<sup>3</sup>, și întreg ansamblul pe pământ  $\sigma_{apam} = 0,2$  MPa, ținând seama și de greutatea proprie.

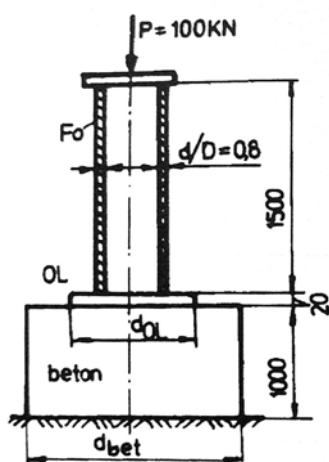


Fig. 5.25

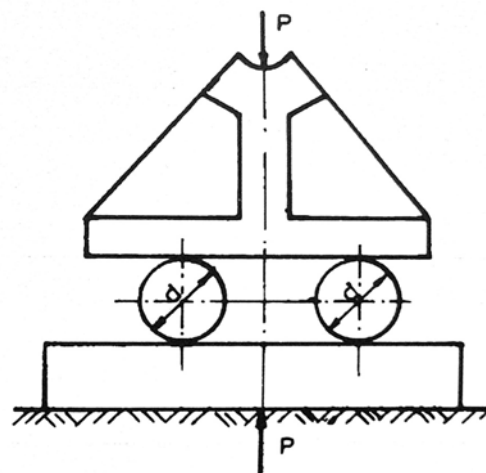


Fig. 5.26

7. Reazemul mobil al unui pod este realizat din două role cu diametru  $d=100$  mm și lungime  $L=900$  mm (fig. 5.26), așezate pe o placă de oțel. Presiunea admisibilă pe suprafața de contact dintre cilindrii și placă este  $p_a = 1100$  MPa. Se cere să se calculeze valoarea forței  $P$  pe care o poate suporta reazemul mobil al podului.

8. Să se verifice bara din figura 5.27 știind că este confecționată din aluminiu cu  $\sigma_a=70$  MPa și are o secțiune inelară cu  $d=0,8D$ .

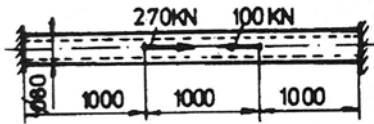


Fig. 5.27

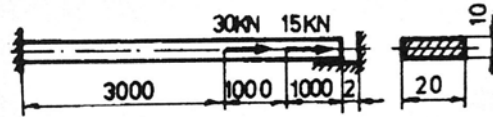


Fig. 5.28

9. Să se verifice bara din figura 5.28 știind că este confecționată din fontă cu  $\sigma_{atr}=70$  MPa,  $\sigma_{acomp}=110$  MPa și  $E=210$  GPa.

10. Să se determine sarcinile capabile să le suporte structurile din figura 5.29, dacă se cunosc:  $\sigma_{cOL}=240$  MPa,  $E_{OL}=210$  GPa,  $\sigma_{cAl}=100$  MPa,  $E_{Al}=70$  GPa. Se impune un coeficient de siguranță  $c=1,6$ .

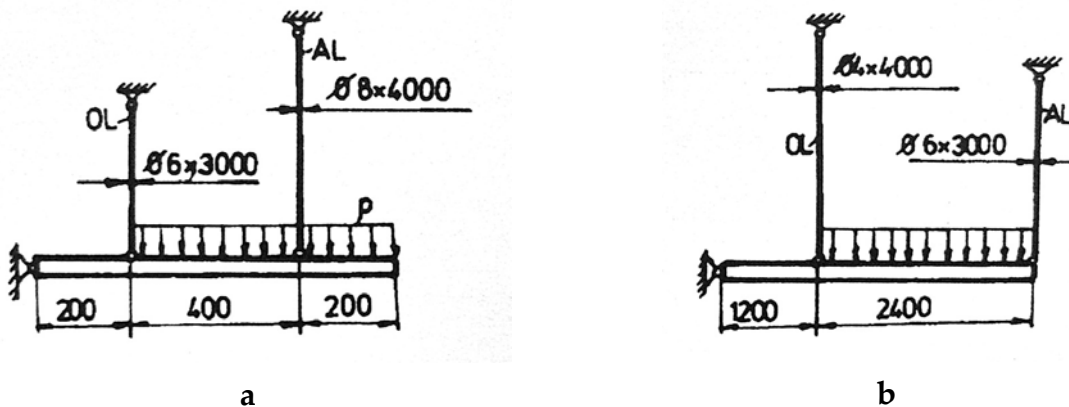


Fig. 5.29

11. Să se determine sarcina capabilă să o suporte un cablu confecționat din 64 fire de oțel ( $\sigma_{cOL}=290$  MPa,  $E_{OL}=210$  GPa) și 128 fire de aluminiu ( $\sigma_{cAl}=110$  MPa,  $E_{Al}=70$  GPa) dacă diametrul unui fir este  $d=4$  mm și se impune un coeficient de siguranță  $c=1,6$ .

12. Să se determine sarcina capabilă să o suporte un cablu confecționat din 64 fire de oțel ( $\sigma_{cOL}=240$  MPa,  $E_{OL}=200$  GPa), 128 fire de cupru ( $\sigma_{cCu}=140$  MPa,  $E_{Cu}=120$  GPa) și 86 fire de aluminiu ( $\sigma_{cAl}=110$  MPa,  $E_{Al}=70$  GPa) dacă diametrul unui fir este  $d=5$  mm și se impune un coeficient de siguranță  $c=1,6$ .

13. Să se determine tensiunile ce iau naștere în barele din figura 5.30 dacă acestea sunt încălzite uniform cu  $100^\circ\text{C}$  față de temperatura de montaj. Se cunosc:  $E_{Cu}=130$  GPa,  $\alpha_{Cu}=1,7 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $E_{Al}=110$  GPa,  $\alpha_{Al}=2,3 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

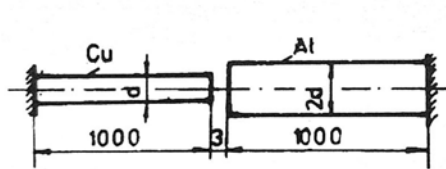


Fig. 5.30

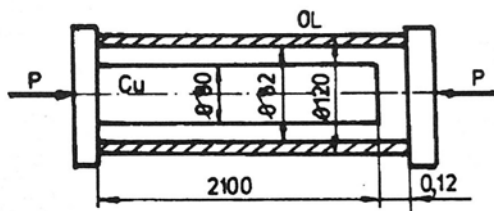


Fig. 5.31

14. Doi cilindri de oțel și respectiv cupru, având forma și dimensiunile prezentate în figura 5.31, sunt comprimați de o sarcină  $P=1200$  kN. Se cere să se determine tensiunile din cilindri și scurtarea acestora ( $E_{OL}=210$  GPa,  $E_{Cu}=130$  GPa).

15. Să se determine sarcina capabilă să o suporte un cablu confecționat din 37 fire de oțel ( $E_{OL}=210$  GPa;  $\sigma_{aOL}=160$  MPa) și 72 fire de aluminiu ( $E_{Al}=70$  GPa;  $\sigma_{aAl}=40$  MPa), știind că diametrul unui fir este  $d=3$  mm.

16. Pentru bara de secțiune circulară din figura 5.32, solicitată de sarcina  $Q=30$  kN în punctul B și de o forță necunoscută  $P$  în punctul A, se cere să se determine:

- valoarea sarcinii  $P$  astfel încât tensiunea normală ce apare în fiecare segment a barei să fie aceeași;
- valoarea sarcinii  $P$  astfel încât tensiunea de pe porțiunea AB să fie egală în modul cu tensiunea de compresiune de pe porțiunea BC.

Să se specifice în fiecare caz dacă sarcina  $P$  este de tracțiune sau de compresiune.

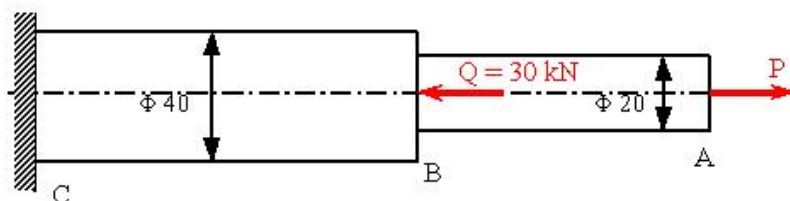


Fig. 5.32

17. Să se determine sarcina capabilă să o suporte sistemul de bare concurente din figura 5.33 confecționat din oțel cu  $\sigma_{aOL}=150$  MPa. Pentru această sarcină să se determine eforturile și tensiunile ce apar în fiecare bară, precum și deplasarea pe verticală a punctului de concurență a barelor.

18. Pentru sistemul de bare concurente din figura 5.34 confecționat din oțel cu  $\sigma_{aOL}=140$  MPa, se cere să se determine eforturile și tensiunile ce apar la montaj, dacă s-a constatat că bara din mijloc este mai lungă cu 2,5 mm.

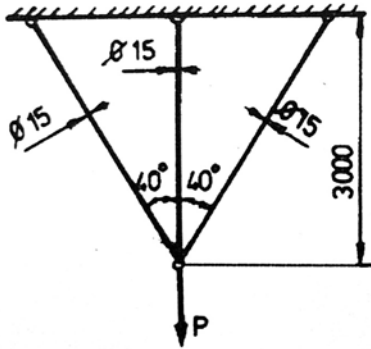


Fig. 5.33

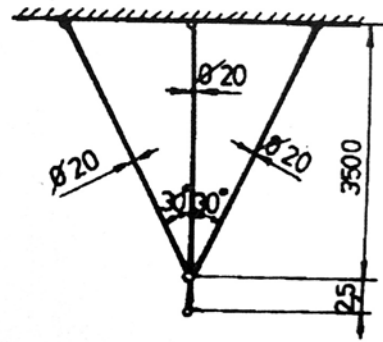


Fig. 5.34

19. Să se determine eforturile și tensiunile ce apar în barele structurii din figura 5.35 dacă acesta este încălzit uniform cu o temperatură  $\Delta T = 100^\circ\text{C}$  față de temperatura de montaj, în următoarele două cazuri:

- ținând seama numai de variația de temperatură;
- luând în considerare atât efectul sarcinii  $P$  cât și al diferenței de temperatură.

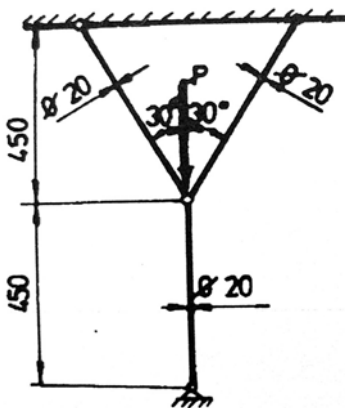


Fig. 5.35

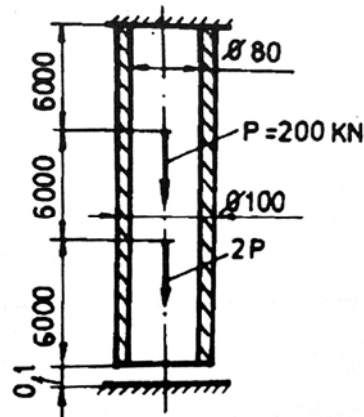


Fig. 5.36

20. Să se verifice bara din figura 5.36 ținând cont și de greutatea proprie, dacă este confecționată din fontă cu  $\sigma_{atr} = 100\text{ MPa}$ ,  $\sigma_{acomp} = 150\text{ MPa}$ ,  $E = 170\text{ GPa}$  și  $\gamma = 71\text{ kN/m}^3$ .

## 6. RĂSUCIREA BARELOR DREPTE

### 6.1. Generalități

O bară este solicitată la răsucire când efortul din orice secțiune transversală a barei este un **moment de torsiune** (răsucire).

Momentul de răsucire dintr-o secțiune oarecare, este egal cu suma tuturor momentelor forțelor situate la stânga sau la dreapta secțiunii considerate.

$$M_t = \sum (P_i \cdot R_i + M_{xi}) \quad (6.1)$$

în care,  $P_i$  sunt forțele exterioare normale pe axa barei,  $R_i$  distanțele de la axă la suportii forțelor, și  $M_{xi}$  sunt momentele exterioare orientate după direcția axei  $Ox$ .

Dacă bara transmite o putere  $P^*$ , în kW, la turația  $n$ , în rotații pe minut, atunci valoarea momentului de torsiune este:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P^* [\text{kW}]}{n [\text{rot/min}]} \quad (6.2)$$

Când valoarea momentului de torsiune variază în lungul barei, pentru calculul de rezistență, se recomandă trasarea diagramelor de momente de torsiune și precizarea secțiunii (sau secțiunilor) periculoase.

În domeniul de activitate al inginerului mecanic se întâlnesc foarte frecvent aplicații ale răsucirii barelor drepte ca de exemplu: arbori, osii motoare, șuruburi etc.

### 6.2 Tensiuni și deformații la răsucirea barelor drepte de secțiune circulară și inelară

Se considera o bară dreaptă de secțiune circulară și constantă în lungul ei realizată dintr-un material continuu, omogen, izotrop și care satisface legea lui Hooke. Pe suprafața barei se trasează cercuri și generatoare, care formează o rețea de dreptunghiuri curbilinii, dintre care se consideră dreptunghiul elementar ABCD. Considerăm secțiunea (1) situată la distanța  $dx$  de secțiunea (2), (fig.6.1,a).

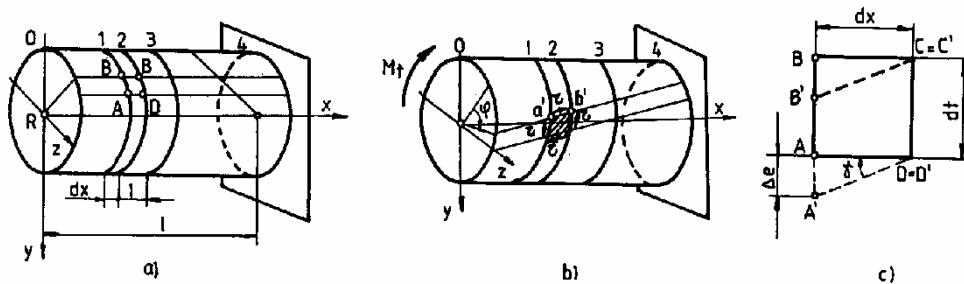


Fig. 6.1

După aplicarea momentului de răsucire, bara se deformează după cum este reprezentată în figura (6.1,b). Analizând deformația barei se constată că:

a) cercurile aflate în plane transversale rămân tot cercuri conținute în aceleași plane transversale, iar distanța dintre acestea nu se modifică semnificativ (se confirmă ipoteza lui Bernoulli, pentru punctele de pe suprafața exterioară și se extinde și la punctele de la interiorul barei);

b) elementele dreptunghiulare de pe suprafața laterală se transformă în paralelamente ale căror laturi își păstrează lungimea;

c) cele două generatoare (fibre) rămân paralele una față de alta, dar se modifică în elici;

Astfel că, orice element dreptunghiular de pe suprafața barei se deformează prin lunecare pură într-un paralelogram (fig.6.1,c). **Unghiul drept se modifică cu lunecarea specifică maximă**, definită de relația (3.38):

$$\gamma_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta x} = \frac{de}{dx}.$$

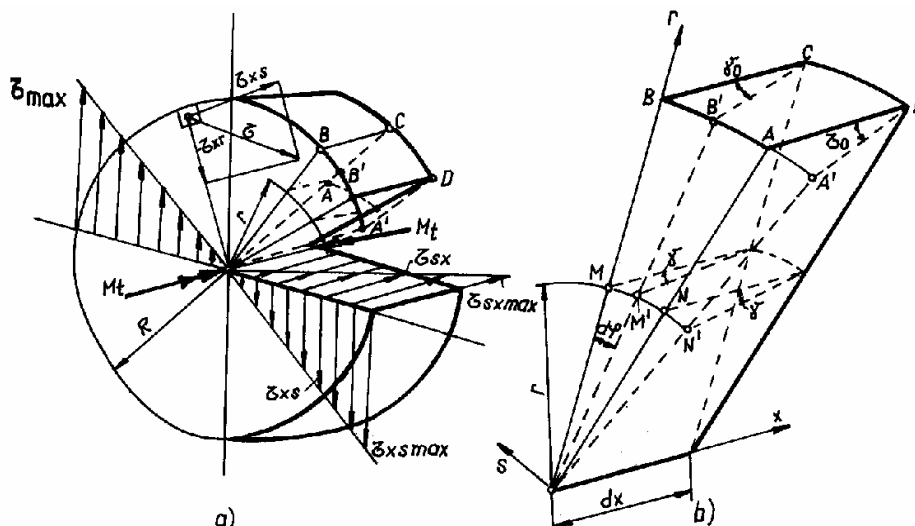


Fig. 6.2

Arcul  $\Delta e$ , este deplasarea prin lunecare a oricărui punct A sau B în A' și respectiv în B'. Astfel, cercul (1) se rotește cu arcul  $\Delta e = AA' = BB'$ , față de cercul (2). Unghiul cu

care se rotește secțiunea (1) față de secțiunea (2), care se află la distanța  $dx$  de secțiunea (1), se numește **deformație unghiulară sau rotire relativă** și se notează cu  $d\varphi$  (fig. 6.2).

Se poate scrie:

$$\Delta e = AA' = BB' = R \cdot d\varphi = \gamma_0 \cdot dx.$$

rezultă:

$$\gamma_0 = R \cdot \frac{d\varphi}{dx} = R \cdot \theta,$$

în care mărimea :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (6.3)$$

se numește **rotire specifică**.

În mod similar, pentru arcul  $MM'$ , aflat la distanța  $r$  față de axa barei, se obține:

$$MM' = r \cdot d\varphi = \gamma \cdot dx,$$

din care se deduce lunecarea specifică la raza  $r$

$$\gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r \cdot \theta. \quad (6.4)$$

Întrucât materialul barei se consideră continuu, omogen, izotrop și elastic, rotirea elementară  $d\varphi$  are aceeași valoare pentru toate punctele unei secțiuni. Deci  $d\varphi$ , fiind constantă pe toată secțiunea transversală și rotirea specifică  $\theta$  rămâne constantă pe toată lungimea  $dx$ . Astfel din relația (6.4) rezultă că **lunecarea specifică variază liniar în funcție de  $r$** . Are valoare nulă pe axa barei și maximă ( $\gamma_0 = R \cdot \theta$ ) pe conturul exterior. Datorită deformațiilor de lunecare în bară se produc tensiuni tangențiale, care se pot determina, pentru solicitări în domeniul liniar-elastic, cu ajutorul legii lui Hooke:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \cdot \theta. \quad (6.5)$$

Considerăm un element de arie  $dA$  aflat la distanța  $R = d/2$  (deci pe conturul exterior al barei, (fig 6.2,a) și pe aceasta o tensiune tangențială  $\tau$  având o direcție oarecare. Aceasta are componentele  $\tau_{xs}$ - tangență la contur și  $\tau_{sx}$  radială. Conform dualității tensiunilor tangențiale unei tensiuni  $\tau_{xs}$  îi va corespunde o tensiune  $\tau_{sx}$  pe suprafața exterioară a barei. Deoarece nu s-au luat în considerare forțe de frecare axiale, pe suprafața exterioară a barei, care să producă tensiunea  $\tau_{sx}$ , aceasta este nulă.

Deci, **tensiunile tangențiale conținute în secțiunea transversală sînt perpendiculare pe rază și variază proporțional cu aceasta**. Conform legii dualității tensiunilor tangențiale, perechea tensiunii  $\tau_{xs}$  este tensiunea  $\tau_{sx}$  și este conținută în planul axial (fig.6.2,a), adică:

$$\tau = \tau_{xs} = \tau_{sx} = \theta \cdot G \cdot r. \quad (6.5, a)$$

Scriind ecuația de echivalență dintre efortul  $M_t$  și tensiunile din planul secțiunii transversale vom obține:

$$M_t = \int_A r \cdot (\tau \cdot dA)$$

și înlocuind pe  $\tau$  din expresia (6.5) se obține:

$$M_t = \theta \cdot G \cdot \int_A r^2 \cdot dA = \theta \cdot G \cdot I_p. \quad (6.6)$$

În relația de mai sus s-a ținut seama că:

$$\int_A r^2 \cdot dA = I_p,$$

este momentul de inerție polar (vezi § 5.4)

Înlocuind mărimile  $\theta \cdot G$  din (6.6) cu expresia rezultată din (6.5) se obține formula tensiunii tangențiale la răsucirea barelor de secțiune circulară:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r, \quad (6.7)$$

din care se poate constata că tensiunea tangențială variază liniar în funcție de rază.

Din relația (6.7), ce este reprezentată grafic în figura (6.2,a), rezultă că tensiunile tangențiale sunt maxime pe conturul exterior al barei:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R = \frac{M_t}{W_p}, \quad (6.8)$$

în care  $W_p$  este **modulul de rezistență polar** și este dat de relația (vezi § 5.7):

$$W_p = \frac{I_p}{R_{\max}}. \quad (6.9)$$

Formula pentru rotirea specifică rezultă din expresia (6.6) și este:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p}. \quad (6.10)$$

**Deci, rotirea specifică este direct proporțională cu momentul de răsucire și invers proporțională cu produsul  $G \cdot I_p$  și care se numește rigiditatea la răsucire a barelor de secțiune circulară și inelară.** Rotirea specifică se măsoară în rad/m, sau grade/m.

Deformația unghiulară a barei de lungime  $L$  sau rotirea relativă a barei, notată cu  $\Delta\varphi$ , ce reprezintă unghiul cu care se rotește secțiunea finală față de cea inițială, se obține din relația (6.3) și (6.10), astfel:

$$\Delta\varphi = \int_L d\varphi = \int_L \theta \cdot dx = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_p}. \quad (6.11)$$

Dacă bara este omogenă, de secțiune constantă și efortul  $M_t$  este constant pe toată lungimea  $L$ , prin integrarea relației (6.11), se obține:



$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p} \quad (6.11,a)$$

iar dacă valorile mărimilor de sub integrala (6.11) sunt constante pe porțiuni din lungimea barei, atunci relația (6.11) devine:

$$\Delta\varphi = \sum \frac{M_{ti} \cdot l_i}{G \cdot I_{pi}} \quad (6.11,b)$$

Deși relațiile (6.7), (6.8), (6.10) și (6.11) au fost deduse pentru secțiunea circulară se pot demonstra la fel și pentru secțiunea inelară.

În formulele (6.6)...(6.11), sunt menționate mărimile  $I_p$  și  $W_p$  care au expresiile:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, \quad (6.12,a)$$

pentru secțiunea circulară și:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - k^4), \quad W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - k^4) \quad (6.12,b)$$

pentru secțiunea inelară, unde  $k = \frac{d}{D}$ .

### 6.3. Calculul de rezistență la răsucire al barelor de secțiune circulară

Calculul de rezistență la răsucire presupune rezolvarea problemelor de verificare, sarcină capabilă și de dimensionare. Acest calcul are la bază formula tradițională consacrată a condiției de rezistență:

$$\tau_{\max} \leq \tau_a, \quad (6.13)$$

cât și cea de rigiditate:

$$\theta_{\max} \leq \theta_a \text{ sau } \Delta\varphi_{\max} \leq \Delta\varphi, \quad (6.14)$$

în care  $\tau_{\max}$  se obține din formula (6.8),  $\theta_{\max}$  cu formula (6.10) și  $\Delta\varphi$  cu una din formulele (6.11).

Valorile rezistenței admisibile la răsucire  $\tau_a$ , respectiv  $\theta_a$  sau  $\Delta\varphi_a$  se stabilesc pentru fiecare ER în funcție de material, condiții de exploatare, rol funcțional, mod de apreciere al forțelor etc.

**1. Problema de verificare** se rezolvă folosind formulele:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a \quad (6.15,a)$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \theta_a \quad \text{sau} \quad \Delta\varphi_{\max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \Delta\varphi \quad (6.15,b)$$

În funcție de rezultatele obținute se vor da verdictele:

**a. BARA REZISTĂ**, dacă toate valorile calculate ( $\tau$ ,  $\theta$ , sau  $\Delta\varphi$ ) sunt inferioare celor admisibile și cel puțin una este mai mare decât 0,8 din cea admisibilă;

**b. BARA NU REZISTĂ**, dacă cel puțin o valoare este mai mare cu mai mult de 5% din cea admisibilă;

**c. BARA ESTE SUPRADIMENSIONATĂ**, dacă toate valorile determinate sunt inferioare valorii de 0,8% din cea admisibilă.

În cazurile b, c se calculează sarcina capabilă.

**2. Problemele de capacitate de încărcare** se rezolvă cu relațiile:

$$M_{t,\text{cap}} = W_p \cdot \tau_a \quad (6.16,a)$$

$$M_{t,\text{cap}} = G \cdot I_p \cdot \theta_a \quad \text{sau} \quad M_{t,\text{cap}} = \frac{G \cdot I_p \cdot \Delta\varphi_a}{L} \quad (6.16,b)$$

Dintre valorile obținute se ia în considerare valoarea cea mai mică; aceasta se va utiliza în continuare pentru adoptarea unei valori rotunjite, întregi care să satisfacă condiția:

$$0,8 \cdot M_{t,\text{cap}} < M_t < 1,05 \cdot M_{t,\text{cap}}.$$

**3. Rezolvarea problemelor de dimensionare**, implică mai întâi determinarea momentului  $M_{t\max}$  (din diagrama de momente), apoi se alege materialul și se adoptă,  $\tau_a$  respectiv  $\theta_a$  sau  $\Delta\varphi_a$  și pentru secțiunea circulară din relațiile (6.8) și (6.12,a) se obține formula:

$$d_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t\max}}{\pi \cdot \tau_a}}, \quad (6.17,a)$$

iar din formulele (6.10), (6.11), (6.12,a), pentru condiția de rigiditate se obțin formulele:

$$d_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32M_{t\max}}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} \quad \text{sau} \quad d_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32M_t \cdot L}{\pi \cdot G \cdot \Delta\varphi_a}} \quad (6.17,b)$$

Pentru barele de secțiune inelară se adoptă raportul  $k = D/d$  și din relațiile (6.8), (6.10), (6.11), (6.12,b), se obține:

$$D_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{16M_{t\max}}{\pi \cdot \tau_a \cdot (1 - k^4)}} \quad (6.18,a)$$

si respectiv:

$$D_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32M_{t\text{max}}}{\pi \cdot G \cdot \theta_a \cdot (1 - k^4)}} \text{ sau } D_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32M_{t\text{max}} \cdot L}{\pi \cdot G \cdot \Delta\varphi_a \cdot (1 - k^4)}}. \quad (6.18,b)$$

Când se iau în considerare atât condiția de rezistență cât și cea de rigiditate, rezultă două valori pentru diametrul ER. Se adoptă valoarea cea mai mare prin rotunjire.

**Aplicația 6.1.** Să se dimensioneze un arbore din oțel ( $G = 8,1 \cdot 10^3$  MPa,  $\tau_a = 80$  MPa,  $\theta_a = 1$  grad/m) care transmite o putere de  $P^* = 30$  kW la o turație de  $n = 200$  rot/min. Arborele se va calcula în cele două cazuri:

- secțiune circulară;
- secțiune inelară  $k = D/d = 0,8$ .

**Rezolvare:**

Momentul de torsiune se determină ca fiind:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P^*}{n} = \frac{30 \cdot 30}{\pi \cdot 200} = 1,432 \text{ kNm}$$

a). Secțiunea circulară:

$$d' = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1432 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80}} = 45,01 \text{ mm},$$

$$d''_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1432 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 180}{\pi \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot \pi}} = 56,67 \text{ mm}.$$

Se adoptă  $d = 60$  mm.

**Observație:** Nu se poate adopta o valoare mai mică ( $d = 55$  mm) decât cea calculată pentru că la verificarea, în condiția de rigiditate se obține:

$$\theta_{\text{max}} = \frac{32M_t}{\pi \cdot G \cdot D^4} = \frac{32 \cdot 1,432 \cdot 10^6}{\pi \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 55^4} \cdot \frac{180 \cdot 10^3}{\pi} = 1,128^\circ / \text{m} > 1,05 \cdot \theta_a.$$

b) Secțiunea inelară:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau_a \cdot (1 - k^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,432 \cdot 10^6}{\pi \cdot (1 - 0,8^4) \cdot 80}} = 53,65 \text{ mm}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a \cdot (1 - k^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,432 \cdot 10^6}{\pi \cdot (1 - 0,8^4) \cdot 81 \cdot 10^3} \cdot \frac{10^3 \cdot 180}{3 \cdot \pi}} = 64,66 \text{ mm}$$

Se adoptă:  $D = 65$  mm,  $d = 52$  mm.

Economia de material, prin utilizarea acestei secțiuni inelare este de:

$$\frac{A_I - A_{II}}{A_I} \cdot 100 = \frac{60^2 - (65^2 - 52^2)}{60^2} \cdot 100 = 57,75\%.$$

**Aplicația 6.2.** Să se dimensioneze arborele din figura 6.3 încastrat la capete și solicitat de un moment de torsiune  $M_0=3 \text{ kNm}$ . Tensiunea admisibilă este de  $\tau_a = 110 \text{ MPa}$ , iar  $d = 0,75D$ .

**Rezolvare:**

Aspectul static este:

$$M_{t1} + M_{t2} = M_t,$$

iar aspectul geometric se scrie:

$$\Delta\varphi_{1-2} + \Delta\varphi_{2-3} + \Delta\varphi_{3-4} = 0$$

din care rezultă aspectul fizic:

$$\frac{M_{t1} \cdot 2a}{G \cdot I_{P1}} + \frac{M_{t1} \cdot a}{G \cdot I_{P2}} + \frac{(M_{t1} - M_t) \cdot a}{G \cdot I_{P2}} = 0.$$

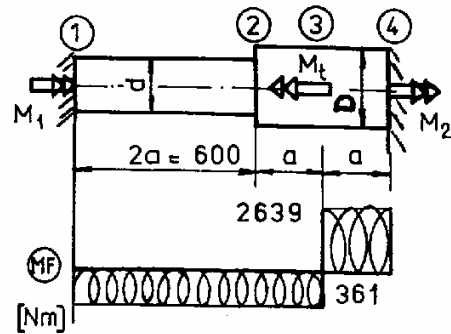


Fig. 6.3

Simplificând termenii asemenea și înlocuind  $d = 0,75D$ , rezultă:

$$M_{t1} = \frac{M_t}{\frac{2}{0,75^4} + 1 + 1} = \frac{0,75^4 \times 3000}{2 \cdot (1 + 0,75)} = 361 \text{ Nm},$$

$$M_{t2} = M_t - M_{t1} = 3000 - 360,5 = 2639 \text{ Nm}$$

Diametrele necesare pentru arbore sunt:

$$d_{\text{nec1-2}} = \sqrt[3]{\frac{16M_{t1-2}}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 361 \cdot 10^3}{\pi \cdot 110}} = 25,57 \text{ mm},$$

și rezultă:

$$D_{1-2} = \frac{d_{1-2}}{0,75} = 34,04 \text{ mm}.$$

$$D_{\text{nec 2-4}} = \sqrt[3]{\frac{16M_{t3-4}}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2639 \cdot 10^3}{\pi \cdot 110}} = 49,62 \text{ mm}.$$

Se adoptă valorile:  $D = 50 \text{ mm}$ ,  $d = 37,5 \text{ mm}$ .

## 6.4. Energia de deformație la răsucirea barelor de secțiune circulară și inelară

Considerând un volum elementar din bară, datorită acțiunii tensiunilor tangențiale  $\tau$  și a lunecării specifice elementare  $\gamma$ , se produce lucrul mecanic elementar specific (fig. 6.4):

$$dL_1 = \tau \cdot d\gamma.$$

Solicitarea fiind în domeniul linear elastic  $\tau = G \cdot \gamma$ , astfel că  $d\gamma = \frac{d\tau}{G}$ , iar lucrul mecanic elementar va fi egal cu energia de deformație, conform ipotezei că în domeniul elastic întreg lucrul mecanic efectuat prin încărcarea barei se acumulează în volumul acesteia sub formă de energie de deformație:

$$dL_1 = dU_1 = \tau \cdot d\gamma = \frac{\tau}{G} \cdot d\tau.$$

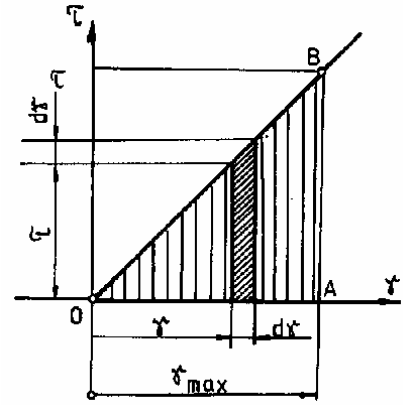


Fig. 6.4

Grafic acest lucru mecanic, respectiv energia de deformație elementară sunt reprezentate prin trapezul hașurat din figura 6.4.

Energia specifică de deformație înmagazinată în elementul de volum unitar când tensiunea crește lent de la 0 la  $\tau$  va avea forma următoare:

$$U_1 = \int_0^\tau dU_1 = \int_0^\tau \tau \cdot \frac{d\tau}{G} = \frac{\tau^2}{2G} \quad (6.19)$$

iar cea acumulată în volumul elementar este:

$$dU = U_1 \cdot dV = \frac{\tau^2}{2G} \cdot dV.$$

Pentru bara dreaptă de secțiune circulară:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r, \quad I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad dV = dA \cdot dx,$$

asa că energia de deformație acumulată în bara de secțiune circulară, de lungime  $L$ , solicitată la răsucire va avea valoarea:

$$U = \int_V dU = \int_V \frac{\tau^2}{2G} \cdot dV = \int_L \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p^2} \int_A r^2 \cdot dA = \int_L \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p}. \quad (6.20)$$

Dacă bara este omogenă, de secțiune circulară constantă și solicitată pe toată lungimea de același  $M_t$ , atunci energia de deformație acumulată va avea valoarea:

$$U = \frac{M_t^2 \cdot L}{2G \cdot I_p} = \frac{16 \cdot M_t^2 \cdot L}{G \cdot d^4}. \quad (6.21)$$

Dacă bara este de secțiune inelară cu factorul dimensional  $k = \frac{d}{D}$ , energia de deformație va avea expresia:

$$U = \frac{16M_t^2 \cdot L}{\pi \cdot G \cdot D^4 \cdot (1 - k^4)}. \quad (6.21,a)$$

## 6.5. Calculul arcurilor elicoidale cu pas mic

Arcul elicoidal se confecționează dintr-o sârmă de oțel avînd diametrul  $d$  care se înfășoară pe un cilindru sub forma unei spirale. Distanța  $D/2$  de la axa cilindrului la axa sârmei înfășurate, se numește **rază de înfășurare**. Așupra arcului acționează o forță  $P$  de-a lungul axei cilindrului. Dacă forța se va reduce în centrul de greutate al unei spire se va obține o forță  $P$  și un moment  $M = P \cdot R$ .

Descompunînd forța  $P$  și momentul  $M$  după axa spirei și perpendicular pe aceasta se obțin eforturile:

$$N = P \cdot \sin\alpha ;$$

$$T = P \cdot \cos\alpha ;$$

$$M_t = P \cdot R_t \cdot \cos\alpha ;$$

$$M_i = P \cdot R \cdot \sin\alpha .$$

La arcurile elicoidale cu pas mic unghiul de înfășurare al spirei are valori mici, astfel că se poate face aproximarea:

$$\sin\alpha \approx 0 ; \cos\alpha \approx 1$$

în acest caz eforturile din orice secțiune a arcului sunt:

$$M_t = P \cdot R = P \cdot \frac{D}{2} \text{ și } T = P . \quad (6.22)$$

Tensiunea tangențială produsă de forța tăietoare este foarte mică în comparație cu cea produsă de momentul de torsiune, astfel că se va lua în calcul numai efectul momentului de torsiune. Va rezulta:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16P \cdot D}{2\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} . \quad (6.23)$$

Relația (6.23) se utilizează în calculul de rezistență pentru: verificare, capacitate de încărcare, dimensionare,

Din această relație se obține diametrul spirei:

$$d_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot P \cdot D}{\tau_a \cdot \pi}} \quad (6.24)$$

Rezistența admisibilă a oțelurilor pentru arcuri (OLC55A, OLC65A, OLC75A, OLC85A, 51SI17A, 60SI15A, 51CR11A), se ia:  $\tau_a = 400..800$  MPa.

**Deformația arcului** se definește ca fiind scurtarea sau lungirea acestuia sub acțiunea unei solicitări (fig.6.5) și **se numește săgeată**.

Relația de determinare a săgeții se obține considerînd egalitatea dintre lucrul mecanic al forțelor exterioare aplicate și energia potențială de deformație acumulată în

volumul arcului. Înând seama că  $L = \frac{P \cdot f}{2}$ , iar energia de deformație este dată de relația (6.20), în care se fac substituirile:

$$M_t = \frac{P \cdot D}{2}; \quad L = \pi \cdot D,$$

egalitatea  $L = U$  devine :

$$\frac{P \cdot f}{2} = \int_L \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p},$$

respectiv:

$$\frac{P \cdot f}{2} = \frac{16 \cdot \pi \cdot D \cdot n \cdot \left(\frac{P \cdot D}{2}\right)^2}{\pi \cdot G \cdot d^4},$$

din care rezulta formula pentru săgeată:

$$f = \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad (6.25)$$

**Aplicația 6.3.** Să se verifice arcurile suspensiei din figura 6.6, solicitate de o forță  $P = 3,2$  kN, dacă elementele arcurilor sunt  $D_1 = 64$  mm,  $d_1 = 8$  mm,  $n_1 = 10$  spire,  $D_2 = 80$  mm,  $d_2 = 10$  mm,  $n_2 = 8$  spire.

**Rezolvare:**

a) Aspectul static:

$$P_1 + P_2 = P,$$

b) Aspectul geometric:

$$f_1 = f_2,$$

c) Aspectul fizic:

$$\frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G \cdot d_1^4} = \frac{8 \cdot (P - P_1) \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G \cdot d_2^4},$$

din care rezultă:

$$P_1 = \frac{P}{1 + \frac{d_2^4 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{d_1^4 \cdot D_2^3 \cdot n_2}} = \frac{3200}{1 + \frac{10^4 \cdot 64^3 \cdot 10}{8^4 \cdot 80^3 \cdot 8}} = 1294 \text{ N},$$

$$P_2 = P - P_1 = 3200 - 1294 = 1951 \text{ N}.$$

Tensiunile tangențiale în cele două spire rezultă:

$$\tau_{1\max} = \frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{8 \cdot 1294 \cdot 64}{\pi \cdot 8^3} = 397,77 \text{ MPa} < \tau_a,$$

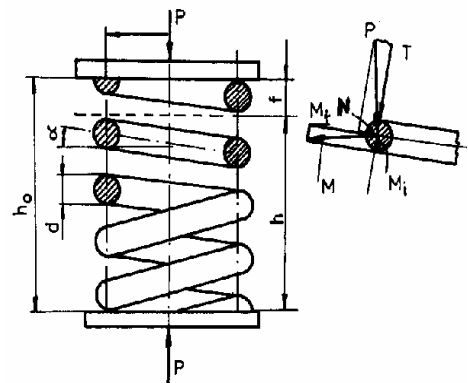


Fig. 6.5

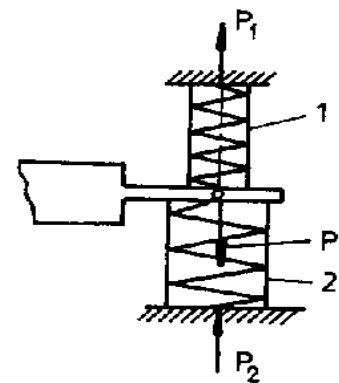


Fig. 6.6

$$\tau_{2\max} = \frac{8 \cdot P_2 \cdot D_2}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{8 \cdot 1951 \cdot 80}{\pi \cdot 10^3} = 397,65 \text{MPa} < \tau_a. \quad \text{Deci, SUSPENSIA REZISTĂ.}$$

**Observație:** Deoarece tensiunile maxime din arcuri sunt apropiate de valoarea admisibilă se poate spune că această suspensie a fost proiectată economic.

## 6.6. Răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară

Teoria generală a răsucirii barelor de secțiune oarecare a fost elaborată de Barré de Saint-Venant și are la bază o demonstrație complicată. Ipoteza secțiunilor plane, verificată și utilizată pentru secțiunile circulare și inelare nu mai corespunde la barele de secțiune oarecare. Acestea se deplanează prin răsucire.

Pe suprafața unei bare de secțiune dreptunghiulară, în stare nesolicitată (fig.6.7,a), se trasează linii drepte echidistante, paralele și perpendiculare pe axa barei. Se obține o rețea de dreptunghiuri.

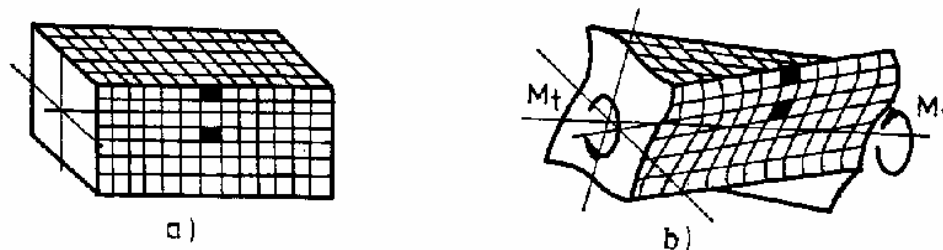


Fig. 6.7

După solicitarea la răsucire, bara se deformează ca în fig.6.7,b, la care se observă că:

a) dreptunghiurile din imediata vecinătate a muchiilor barei își păstrează forma, deci în aceste puncte deformațiile și tensiunile sunt nule;

b) dreptunghiurile aflate în imediata vecinătate a mijlocului fețelor își schimbă cel mai mult forma, devenind paralelograme. Deci, în apropierea mijlocului laturilor lunecările vor fi maxime și ca atare aici se vor produce tensiunile maxime.

Distribuția tensiunilor tangențiale, determinată de Saint-Venant, este prezentată în figura 6.6.

Variația tensiunilor tangențiale nu este liniară pe nici o direcție. În colțurile dreptunghiului și în axa de simetrie Ox, tensiunile tangențiale sunt nule.

Pentru secțiunile dreptunghiulare cu raportul h/b mic se poate considera că tensiunile tangențiale de pe contur variază parabolic.

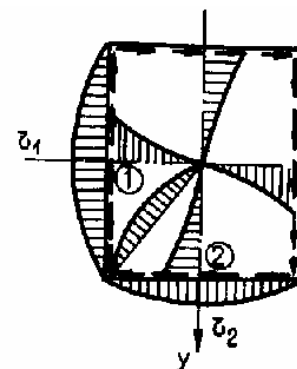


Fig. 6.8



Dacă  $h/b$  este mare (profile subțiri) se poate considera că  $\tau$  este constant pe latura mare și variază liniar pe grosime.

Relațiile de calcul deduse de Barré de Saint-Venant, sunt:

- Pentru tensiunea tangențială maximă ce se produce pe mijlocul laturii mari a dreptunghiului:

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_t}{k_1 \cdot h \cdot b^2}, \quad (6.26)$$

- Pentru tensiunea tangențială la mijlocul laturii mici este:

$$\tau_2 = k_3 \cdot \tau_{\max}, \quad (6.27)$$

- Pentru rotirea specifică, a barelor de secțiune dreptunghiulară:

$$\theta = \frac{M_t}{k_2 \cdot G \cdot h \cdot b^3} \quad (6.28)$$

În relația de mai sus s-a notat cu  $b$  latura mai mică a secțiunii dreptunghiulare iar  $k_1, k_2, k_3$ , depind de raportul  $h/b$  al laturilor. Valorile acestor coeficienți sunt date în tabelul (6.1).

**Tabelul 6.1**

$h/b$	1	1,20	1,50	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0
$k_1$	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307
$k_2$	0,141	0,166	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,294	0,299	0,307
$k_3$	1,000	0,93	0,86	0,82	0,795	0,766	0,753	0,754	0,744	0,743	0,742

Pentru valori mari ale raportului  $h/b$  ( $h/b \geq 10$ ) se poate lua:  $k_1 = k_2 = 1/3$ , iar relațiile (6.17) și (6.19) devin:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t}{h \cdot b^2}; \quad \theta = \frac{3M_t}{G \cdot h \cdot b^3}. \quad (6.29)$$

Dacă vom nota cu:

$$W_t = k_1 \cdot h \cdot b^2, \quad (6.30,a)$$

și pe care o numim, caracteristica geometrică de rezistență la răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară și cu:

$$I_t = k_2 \cdot h \cdot b^3, \quad (6.30,b)$$

numită caracteristica geometrică de rigiditate la răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară, relațiile (6.26) și (6.28) devin:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (6.26,a)$$

și

$$\theta_{\max} = \frac{M_t}{G \cdot I_t}, \quad (6.28,a)$$

cea ce permite generalizarea calculului și pentru alte forme de secțiuni.

Expresiile caracteristicilor geometrice de rezistență  $W_t$  și de rigiditate  $I_t$ , pentru alte forme de secțiuni, sunt date în Anexa nr.6.

Calculul rotirii relative  $\Delta\varphi$  se va face cu relațiile:

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_t} \text{ sau } \Delta\varphi = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_{ti}}$$

**Aplicația 6.4.** Bara de secțiune dreptunghiulară din figura 6.9 este confecționată din oțel ( $G = 81\text{GPa}$ ). Să se determine tensiunea maximă și rotirea relativă totală dacă este solicitată de un moment de torsiune

$$M_t = 20 \text{ kNm.}$$

**Rezolvare:** Tensiunea maximă se produce la mijlocul laturii mari a dreptunghiului și este egală cu:

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_t}{k_1 \cdot h \cdot b^2} = \frac{10 \cdot 10^6}{0,231 \cdot 150 \cdot 100^2} = 57,72 \text{ MPa;}$$

iar tensiunea tangențială la mijlocul laturii mici este:

$$\tau_2 = k_3 \cdot \tau_1 = 0,86 \cdot 57,72 = 49,64 \text{ MPa.}$$

În relațiile de mai sus s-au înlocuit  $k_1 = 0,231$  și  $k_3 = 0,86$  pentru  $h/b = 1,5$ , (Anexa 6).

Rotirea relativă totală va fi

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_t} = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot k_2 \cdot h \cdot b^3} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 2000}{0,196 \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 100^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = 1,680 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0,9624^\circ,$$

unde,  $k_2 = 0,196$  tot pentru  $h/b = 1,5$ , (Anexa 5).

**Aplicația 6.5.** Să se determine forța capabilă și săgeata corespunzătoare acesteia la un arc elicoidal confecționat din sârmă pătrată de latură  $a = 8 \text{ mm}$ ,  $n = 8$  spire și  $D = 60 \text{ mm}$ , dacă  $\tau_a = 230 \text{ MPa}$  și  $G = 81 \text{ GPa}$ .

**Rezolvare:**

$$W_t = k_1 \cdot b \cdot t^2 = 0,208 \cdot 8^3 = 106,5 \text{ mm}^3,$$

$$I_t = k_2 \cdot b \cdot t^3 = 0,141 \cdot 8^4 = 557,5 \text{ mm}^4.$$

Aplicând relațiile (6.30) și (6.21) obținem:

$$P_{\text{cap}} = \frac{\tau_a \cdot W_t}{R} = \frac{230 \cdot 106,5}{30} = 816,5 \text{ N ; } P = 800 \text{ N}$$

Considerând egalitatea  $L = U$  (vezi § 6.4) în cazul secțiunii dreptunghiulare se obține:

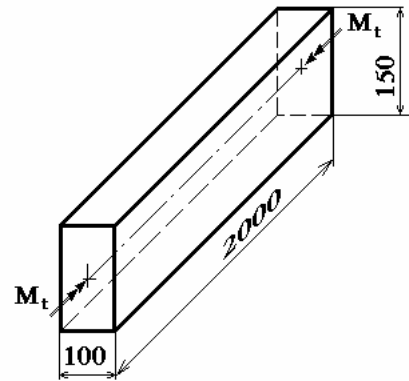


Fig. 6.9

$$f = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot n}{4G \cdot I_t} = \frac{\pi \cdot 0,8 \cdot 60^3 \cdot 8}{4 \cdot 81 \cdot 577,5} = 23,21 \text{ mm} .$$

## 6.7. Răsucirea barelor cu pereți subțiri, deschise

Prin bare cu pereți subțiri deschise se înțeleg profilele laminate sub formă L, T, U, I, sau alte forme obținute prin laminare sau prin îndoire și/sau sudare din benzi de tablă laminată. În această categorie intră profilele ce au elemente de grosime mică ( $h \geq 10 \cdot b$ ) și nu închid goluri (secțiunea este simplu conexă) sau dacă închid un gol au cel puțin o generatoare nesudată.

Se consideră bara din figura 6.10 solicitată la răsucire. Elementele ce compun bara sînt cele două tălpi și inima. Problema se tratează descompunând bara în trei dreptunghiuri componente și din cele trei aspecte rezultă:

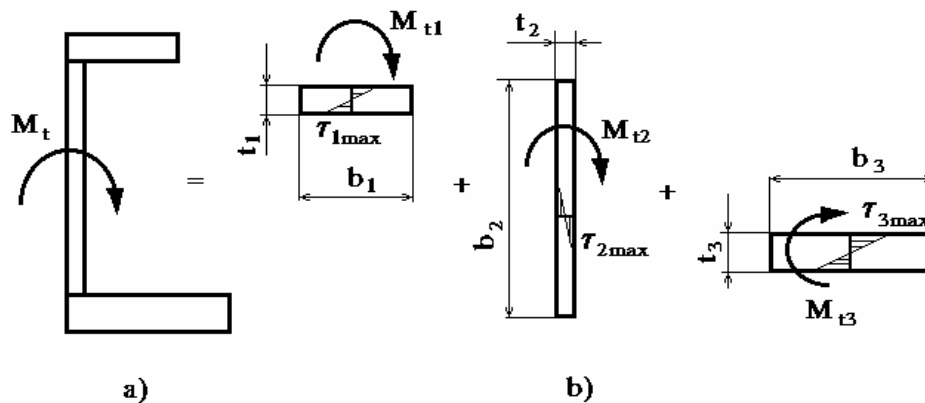


Fig. 6.10

a) - Din aspectul static:

$$M_t = M_{t_1} + M_{t_2} + M_{t_3} = \sum M_{t_i},$$

b) - Din aspectul geometric:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$$

c) - Din aspectul fizic:

$$\frac{M_t}{G \cdot I_{t_1}} = \frac{M_t}{G \cdot I_{t_3}} = \frac{M_t}{G \cdot I_t} = \frac{M_{t_3} + M_{t_2} + M_{t_1}}{G \cdot (I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3})} = \frac{M_t}{G \cdot I_{t_d}}$$

Din această relație rezultă **caracteristica geometrică de rigiditate la răsucirea barelor cu pereți subțiri, profil deschis:**

$$I_{t_d} = I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3} = \sum I_{t_i} = \frac{1}{3} \cdot \sum b_i \cdot t_i^3 . \quad (6.31)$$

În cazul profilelor subțiri laminare se ia:

$$I_{td} = (I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3}) = \sum I_{t_i} = \frac{\alpha}{3} \sum b_i \cdot t_i^3 ,$$

în care  $\alpha = 1$  la profilele cornier,  $\alpha = 1,1 \dots 1,2$  la profilele U iar  $\alpha = 1,3$  la profilele I.

Din relația aspectului fizic se obține:

$$M_{t_i} = M_t \frac{I_{t_i}}{I_{td}} ,$$

astfel că tensiunea maximă pe conturul elementului  $i$  rezultă:

$$\tau_{i_{max}} = \frac{M_{t_i}}{W_{t_i}} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} b_i \cdot t_i^2} \cdot \frac{\frac{1}{3} b_i \cdot t_i^3}{I_{td}} = \frac{M_t}{I_{td}} \cdot t_i .$$

Deci, tensiunea maximă este funcție de grosimea  $t_i$  a profilului. Rezultă că tensiunea cea mai mare (dintre  $\tau_i$ ) va exista în elementul de grosimea cea mai mare ( $t_{max}$ ):

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_{td}} \cdot t_{max} = \frac{M_t}{W_{td}} . \quad (6.32)$$

Mărimea

$$W_{td} = \frac{I_{td}}{t_{max}} = \frac{\alpha}{3 t_{max}} \sum b_i \cdot t_i^3 , \quad (6.33)$$

se numește **caracteristică geometrică de rezistență la răsucire a profilului cu pereți subțiri, profil deschis** și este similară modulului de rezistență polar de la secțiunea circulară.

Din aspectul fizic se poate scrie:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_{td}} , \quad (6.34)$$

și respectiv:

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_{td}} = \sum \frac{M_{t_i} \cdot L_i}{G \cdot I_{td}} . \quad (6.35)$$

**Aplicația 6.6.** Să se calculeze momentul de răsucire capabil să-l suporte secțiunea din figura 6.11 și corespunzător acestuia, rotirea specifică (secțiunea se compune din două profile U 20 fără să fie sudate între ele). Se cunoaște:  $\tau_a = 210$  MPa.

**Rezolvare:**

Caracteristicile geometrice ale secțiunii sunt:

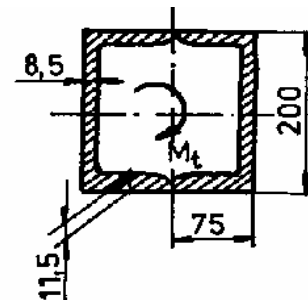


Fig. 6.11

$$I_{td} = \frac{1}{3} \sum b_i \cdot t_i^3 = 2 \cdot \frac{1,15}{3} \cdot [2 \cdot 0,85^3 + (2 \cdot 7,5 - 0,85) \cdot 1,15^3] = 17,44 \text{ cm}^4,$$

$$W_{td} = \frac{I_{td}}{b_{\max}} = \frac{17,44}{1,15} = 15,166 \text{ cm}^3.$$

Momentul de torsiune capabil rezultă:

$$M_{t\text{cap}} = \tau_a \cdot W_{td} = 15,166 \cdot 120 \cdot 10^{-3} = 1,8199 \text{ Nm}.$$

Se adoptă:  $M_t = 1800 \text{ Nm}$ .

Rotirea specifică corespunzătoare este:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_{td}} = \frac{1800 \cdot 10^3}{81 \cdot 10^3 \cdot 17,44 \cdot 10^4} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 10^3 = 7,3^0 / \text{m}.$$

## 6.8. Răsucirea barelor cu pereți subțiri, închise

Considerăm o bară tubulară cu pereți subțiri, ce are secțiunea transversală de formă oarecare, dar constantă în lungul barei (fig.6.12,a). Notăm cu  $\Omega$  aria închisă de fibra medie a profilului secțiunii, cu  $s$  lungimea fibrei medii și cu  $t$  grosimea peretelui. Sub acțiunea momentului de torsiune, în secțiune se produc tensiuni tangențiale paralele la linia medie a profilului. Se admite că la grosimi mici ale peretelui aceste tensiuni **sunt repartizate uniform pe toată grosimea peretelui**. Această ipoteză concordă cu atât mai bine cu realitatea cu cât grosimea peretelui este mai mică.

Izolăm din bară un element de lungime  $dx$  (fig. 6.12,b). Din aceasta detașăm o fâșie longitudinală cuprinsă între generatoarele ① și ②. Pe fețele fâșiei apar tensiuni tangențiale care satisfac **legea dualității tensiunilor tangențiale** (fig. 6.12,b). Din condiția de echilibru a forțelor elementare se obține:

$$\tau_1 \cdot t_1 \cdot dx = \tau_2 \cdot t_2 \cdot dx,$$

din care rezultă că în orice punct al secțiunii transversale produsul  $\tau \cdot t$  este constant:

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \tau_i \cdot t_i = ct. \quad (6.36)$$

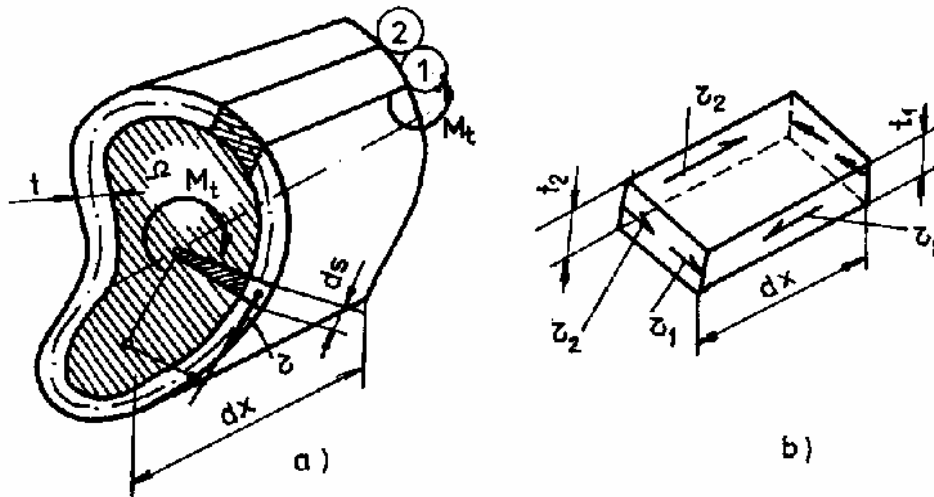


Fig. 6.12

Acest produs se numește **flux al tensiunilor tangențiale**. Deci valoarea tensiunilor tangențiale este maximă unde grosimea peretelui este minimă și are valoarea minimă unde grosimea peretelui este maximă.

Din relația de echilibru a elementului obținem:

$$M_t = \int_A r \cdot \tau \cdot dA = \int_0 \tau \cdot r \cdot t \cdot ds,$$

unde s-a notat cu  $r$  brațul efortului tangențial  $dT = \tau \cdot dA$ , de la acesta la centrul de răsucire  $O$  și  $dA = t \cdot ds$ .

Din figură se observă că  $d\Omega = \frac{r \cdot ds}{2}$ , adică aria triunghiului elementar corespunzător lungimii de arc  $ds$  pe fibra medie. Cu această notație momentul de răsucire rezultă :

$$M_t = \tau \cdot t \cdot \int_s r \cdot ds = 2\tau \cdot t \cdot \Omega,$$

iar expresia tensiunii tangențiale este:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot t \cdot \Omega}. \quad (6.37,a)$$

Tensiunea maximă care se produce în dreptul grosimii celei mai mici, este:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \cdot t_{\min} \cdot \Omega} = \frac{M_t}{W_{tI}} \quad (6.37)$$

în care:

$$W_{tI} = 2 \cdot t_{\min} \cdot \Omega, \quad (6.38)$$

este **caracteristica geometrică de rezistență la răsucire a barelor cu pereți subțiri profil închs.**

Pentru determinarea rotirii specifice se scrie egalitatea dintre lucrul mecanic exterior, produs prin aplicarea momentului de răsucire, pe un element de lungime  $dx = L$ , cu energia de deformare potențială acumulată în element-

$$\frac{M_t \cdot \theta}{2} = \int \frac{\tau^2}{2G} dV .$$

Înlocuind pe  $\tau$  din relația (6.34,a) și pe  $dV = 1 \cdot t \cdot ds$ , se obține:

$$\theta = \frac{M_t}{4G \cdot \Omega^2} \oint \frac{ds}{t} = \frac{M_t}{G \cdot I_{tf}}, \quad (6.39)$$

în care mărimea:

$$I_{ti} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{s}{t}} \quad (6.40)$$

este **caracteristica geometrică de rigiditate la răsucire a barelor cu pereți subțiri profil închis.**

Relațiile (6.34) și (6.35) sunt **formulele lui R. Bredt.**

Dacă grosimea peretelui este constantă în lungul fibrei medii atunci se obține:

$$\theta = \frac{M_t \cdot s}{4 \cdot G \cdot t \cdot \Omega^2}. \quad (6.41)$$

Analog ca la celelalte structuri rotirea relativă se determină cu relația:

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_{tf}} = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_{tf}}. \quad (6.42)$$

**Aplicație 6.7.** Pentru bara din oțel ( $G = 81 \text{ GPa}$ , și  $\tau_a = 90 \text{ MPa}$ ) cu secțiunea din figura 6.13 se cer:

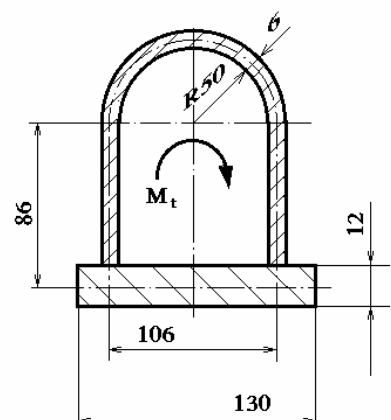
- caracteristicile geometrice la răsucire, profil deschis și profil închis;
- momentul de torsiune capabil;
- rotirile specifice maxime corespunzătoare momentelor de torsiune calculate;
- tensiunile tangențiale și diagramele de variație pe secțiune.

**Rezolvare:**

a) caracteristici geometrice:

- **profil deschis:**

Secțiunea dată se descompune în dreptunghiuri subțiri.



**Fig. 6.13**

La arce de cerc lungimea dreptunghiului este egală cu desfășurata pe fibra medie.

$$I_{td} = \frac{\alpha}{3} \cdot \sum b_i \cdot t_i^3 = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 8 \cdot 0,6^3 + \pi \cdot 5,3 \cdot 0,6^3 + 13 \cdot 1,2^3) \Rightarrow I_{td} = 9,839 \text{ cm}^4,$$

$$W_{td} = \frac{I_{td}}{t_{\max}} = \frac{9,839}{1,2} = 8,2 \text{ cm}^3.$$

**- profil închis:**

Se duce fibra medie și se calculează aria închisă de aceasta:

$$\Omega = 10,6 \cdot 8,6 + \frac{\pi \cdot 5,3^2}{2} = 135,2 \text{ cm}^2, \quad W_{ti} = 2 \cdot \Omega \cdot t_{\min} = 2 \cdot 135,2 \cdot 0,6 = 162,3 \text{ cm}^3,$$

$$I_{ti} = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\sum \frac{s}{t}} = \frac{4 \cdot 135,2^2}{\frac{10,6}{1,2} + \frac{2 \cdot 8,6}{0,6} + \frac{\pi \cdot 5,3}{0,6}} = 1122 \text{ cm}^4.$$

În ultima relație  $s$  înseamnă lungimea fibrei medii:

b) Momentele de torsiune capabile:

$$M_{tcap,d} = \tau_a \cdot W_{td} = 90 \cdot 8,2 \cdot 10^{-3} = 0,738 \text{ kNm},$$

$$M_{tcap,i} = \tau_a \cdot W_{ti} = 90 \cdot 162,3 \cdot 10^{-3} = 14,61 \text{ kNm}.$$

Se adoptă:

$$M_{td} = 0,75 \text{ kNm};$$

$$M_{ti} = 14,5 \text{ kNm}.$$

c) Rotirile specifice maxime se determină cu relațiile (6.34) și (6.40) și se obține:

$$\theta_{\max,d} = \frac{M_t}{G \cdot I_{td}} = \frac{0,75 \cdot 10^6}{81 \cdot 10^3 \cdot 9,839 \cdot 10^4} = 9,411 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} = 5,392^\circ / \text{m},$$

$$\theta_{\max,i} = \frac{M_{ti}}{G \cdot I_{ti}} = \frac{14,5 \cdot 10^6}{81 \cdot 10^3 \cdot 1122 \cdot 10^4} = 1,595 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} = 0,9141^\circ / \text{m}.$$

d) Se determină tensiunile tangențiale cu relațiile (6.32) și respectiv (6.37):

**- profil deschis:**

$$\tau_{td_{\max}} = \frac{M_{td}}{W_{td}} = \frac{0,75 \cdot 10^6}{8,2 \cdot 10^3} = 91,46 \text{ MPa},$$

$$\tau_{td_i} = \frac{M_{td}}{I_{td}} \cdot t_i = \frac{0,75 \cdot 10^6}{9,839 \cdot 10^4} \cdot 6 = 45,73 \text{ MPa}$$

**- profil închis:**

$$\tau_{ti_{\max}} = \frac{M_{ti}}{W_{ti}} = \frac{14,5 \cdot 10^6}{162,3 \cdot 10^3} = 89,3 \text{ MPa},$$

$$\tau_{ti_t} = \frac{M_{ti}}{2 \cdot \Omega \cdot t_t} = \frac{14,5 \cdot 10^6}{2 \cdot 135,2 \cdot 10^2 \cdot 12} = 44,67 \text{ MPa}.$$



**Observație:** Comparând momentele de torsiune capabile se observă că la același consum de material profilul închis rezistă de 19,8 ori (14,62/0,738) mai mult decât profilul deschis, iar dacă se compară rotirile specifice se observă că bara realizată din profil deschis este mult mai elastică, de aproximativ 6 ori. Adoptarea uneia sau alteia din soluții se va face în funcție de scopul urmărit și anume:

- pentru structuri rigide se adoptă profilul închis;
- pentru structuri elastice se adoptă profilul deschis, care admite deformații mari fără a se depăși tensiunea tangențială admisibilă.

## 6.9. Generalizarea relațiilor de calcul la răsucire

Analizând forma identică a relațiilor (6.8), (6.26,a), (6.32) și (6.37) pentru calculul tensiunilor tangențiale maxime la răsucirea barelor drepte, a relațiilor (6.10), (6.28,a), (6.34) și (6.39) pentru determinarea rotirilor specifice și respectiv (6.11), (6.30), (6.35) și (6.42) se pot scrie relații unice și anume:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t\max}}{W_t} \leq \tau_a, \quad (6.43)$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{t\max}}{G \cdot I_t} \leq \theta_a, \quad (6.44)$$

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_t} = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_t} \leq \Delta\varphi_a. \quad (6.45)$$

Dacă în aceste relații se înlocuiesc  $W_t$  și  $I_t$  cu caracteristicile geometrice la răsucire corespunzătoare fiecărei forme de secțiune și anume:

- la secțiunea circulară:

$$W_t \rightarrow W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16},$$

$$I_t \rightarrow I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

- la secțiunea inelară cu factorul dimensional  $k = d/D$ :

$$W_t \rightarrow W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - k^4),$$

$$I_t \rightarrow I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - k^4).$$

- la secțiunea dreptunghiulară ( $h > b$ ):

$$W_t \rightarrow W_t = k_1 \cdot h \cdot b^2,$$

$$I_t \rightarrow I_t = k_2 \cdot h \cdot b^3,$$

- la bare cu pereți subțiri, profil deschis ( $b \gg t$ ):

$$W_t \rightarrow W_{td} = \frac{I_t}{t_{\max}},$$

$$I_t \rightarrow I_{td} = \frac{\alpha}{3} \sum b \cdot t^3,$$

unde:  $\alpha = 1$  pentru toate secțiunile cu excepția profilelor standardizate pentru care avem,  $\alpha = 1,1..1,2$  pentru profilul U,  $\alpha = 1,3$  pentru profilul I.

- la barele cu perete subțire profil închis:

$$W_t \rightarrow W_{if} = 2 \cdot \Omega \cdot t_{\min},$$

$$I_t \rightarrow I_{if} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{s}{t}},$$

în care  $\Omega$  este aria închisă de fibra medie iar  $s$  este lungimea fibrei medii.

## 6.10. Întrebări - teste

1. Ce stare de tensiune se dezvoltă într-un punct de pe suprafața exterioară a unei bare solicitată la torsiune?
2. De ce la șasiurile autocamioanelor se folosesc profile cu contur deschis?
3. Doi arbori sunt confecționați din același material ( $\tau_{a1} = \tau_{a2}$ ) și transmit aceeași putere ( $P_1 = P_2$ ) dar au turațiile în raportul  $n_1 = 5n_2$ . Care este raportul diametrelor  $d_1/d_2$ ? Cum explicați rezultatul obținut?
4. Care sunt elementele caracteristice ale unui arc elicoidal cilindric?
5. La ce solicitări este supusă spira unui arc?
6. Care este punctul cel mai solicitat al secțiunii spirei arcului elicoidal cilindric cu spiră strânsă?
7. Care este expresia constantei elastice a unui arc elicoidal cilindric cu spiră strânsă?

## 6.11. Probleme propuse

1. Să se dimensioneze arborele din fig. 6.14 care este solicitat de un moment de torsiune  $M_t=10$  kNm dacă este confecționat din oțel cu  $G=81$  GPa și  $\tau_a=100$  MPa. Să se determine rotirea relativă totală a arborelui.

2. Să se ridice nedeterminarea și să se dimensioneze arborele din fig. 6.15, știind că este confecționat din oțel cu  $G=81$  GPa  $\tau_a=100$  MPa și  $\theta_a=2^\circ/m$ .

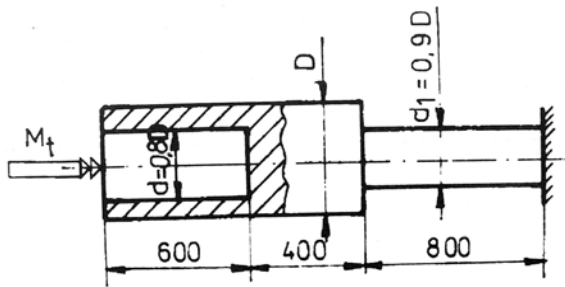


Fig. 6.14

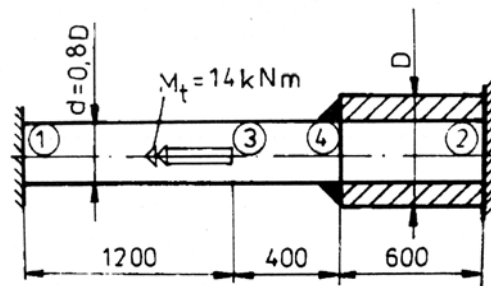


Fig. 6.15

3. Arborele cu secțiune circulară variabilă încastrat la ambele capete și solicitat ca în fig. 6.16 este realizat din oțel cu  $G=81$  GPa  $\tau_a=110$  MPa. Se cere să se verifice acest arbore știind că rotirea specifică maximă admisă este  $\theta_a=2^\circ/m$ .

4. Bara de oțel ① este fixată într-un tub de bronz ② ca în fig. 6.17. Cunoscând modulele de elasticitate transversale pentru cele două materiale ( $G_{Ol}=81$  GPa și  $G_{Br}=48$  GPa), se cere să se determine:

- tensiunile tangențiale maxime ce apar în cele două materiale;
- rotirea relativă a secțiunilor situate la distanța  $L=800$  mm.

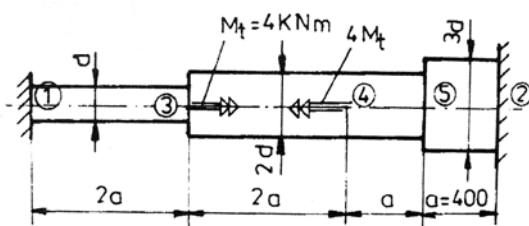


Fig. 6.16

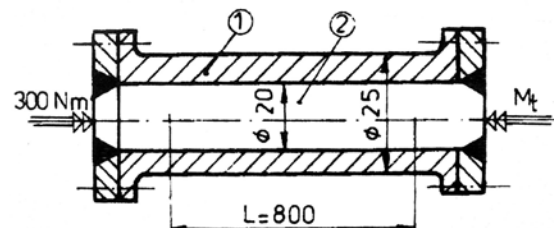


Fig. 6.17

5. Îmbinarea a două țevi utilizate la foraj se face cu ajutorul unei reducții filetate ca în fig. 6.18. Se cere să se determine diametrul exterior ( $D_2$ ) necesar pentru reducție dacă tensiunea maximă ce apare în țevi este  $\tau_{max}=70$  MPa, iar rezistența admisibilă a materialului reducției este  $\tau_a=40$  MPa.

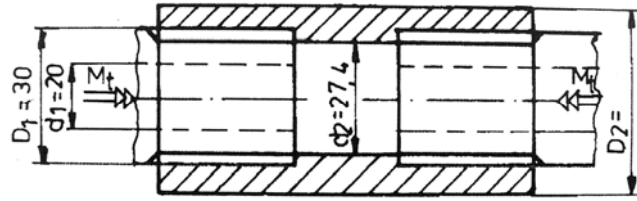


Fig. 6.18

6. Cuplajul din fig. 6.18 este realizat cu pene paralele  $b \times h = 24 \times 16 \text{ mm}^2$  și șuruburi M12. Se cere să se determine:

- Momentul capabil al arborelui cu diametrul  $\phi 80$ , dacă  $\tau_a = 70 \text{ MPa}$ ;
- Lungimea necesară penelor, dacă  $\tau_{ap} = 80 \text{ MPa}$ ;
- Numărul necesar de șuruburi, dacă momentul capabil de transmisie, dacă  $\tau_{as} = 80 \text{ MPa}$
- pentru reducție dacă tensiunea maximă ce apare în țevi este  $\tau_{\max} = 70 \text{ MPa}$ , iar rezistența admisibilă a materialului reducției este  $\tau_a = 40 \text{ MPa}$ .

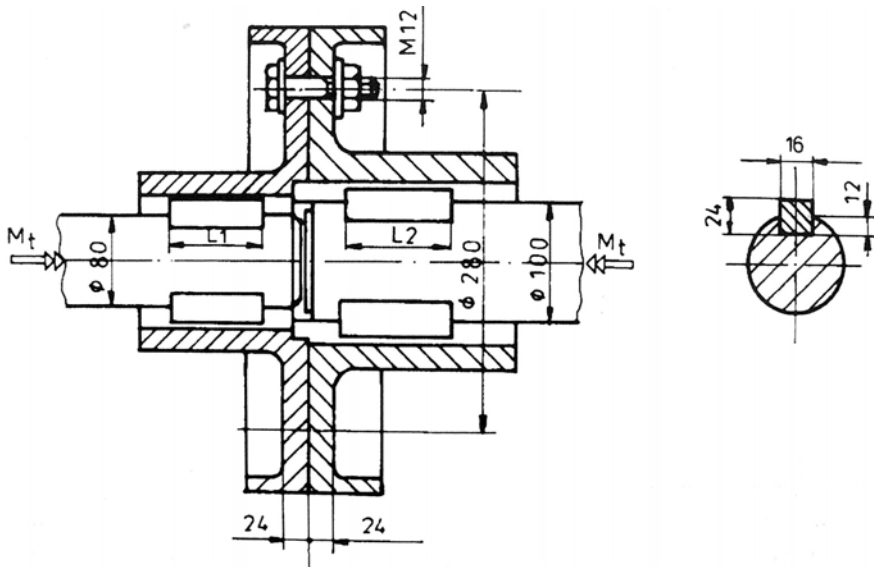


Fig. 6.19

7. Un arbore de lungime  $L = 1 \text{ m}$  având secțiunea eliptică (fig 6.20), confecționat din oțel cu  $G = 81 \text{ GPa}$   $\tau_a = 600 \text{ MPa}$  este solicitat de un moment de torsiune  $M_t = 3 \text{ kNm}$ . Se cere să se determine tensiunile în punctele **A** și **B**.

8. O bară având secțiunea prezentată în fig. 6.21 este solicitată de un moment de torsiune  $M_t = 1,5 \text{ kNm}$ . Se cere să se determine:

- tensiunile tangențiale ce apar pe această secțiune;
- să se traseze diagramele de variație a acestor tensiuni;
- să se determine rotirea specifică maximă, dacă  $G = 81 \text{ GPa}$ .

9. Pentru bara realizată din două profile U24 ( $\tau_a=600$  MPa ) așezate ca în fig. 6.22, se cere să se determine:

- momentele de torsiune capabile (profil deschis și profil închis);
- rotirile specifice corespunzătoare momentelor de torsiune determinate;
- tensiunile tangențiale corespunzătoare momentelor determinate și să se traseze diagramele de variație a acestor tensiunilor tangențiale pe secțiune.

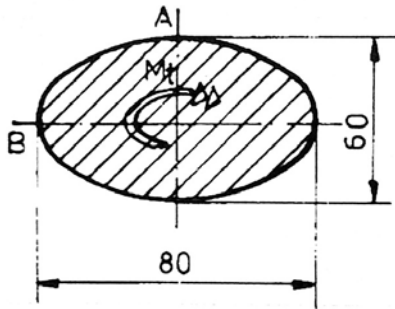


Fig. 6.20

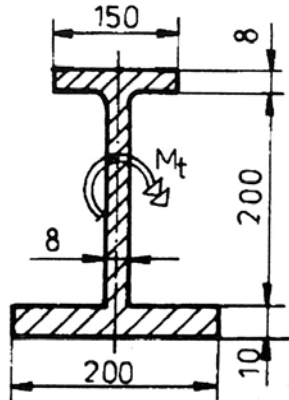


Fig. 6.21

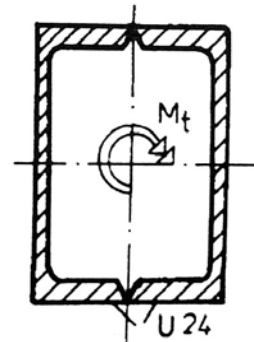


Fig. 6.22

10. Barele cu secțiunile prezentate în fig. 6.23 sunt confecționate din oțel cu  $G=81$  GPa  $\tau_a=90$  MPa. se cere să se determine:

- momentele de torsiune capabile (profil deschis și profil închis);
- rotirile specifice corespunzătoare momentelor de torsiune determinate;
- tensiunile tangențiale corespunzătoare momentelor determinate și să se traseze diagramele de variație a acestor tensiunilor tangențiale pe secțiune.

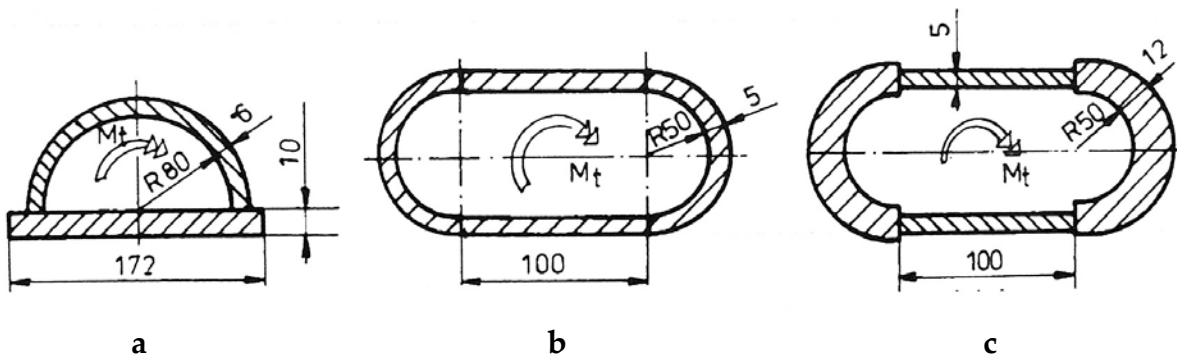


Fig. 6.23

11. Să se dimensioneze un arc de secțiune circulară confecționat din oțel ( $G=81$  GPa  $\tau_a=400$  MPa) cu  $n=12$  spire, dacă acest arc trebuie să suporte o sarcină  $P=2$  kN, știind că se impune o săgeată maximă  $f_{max}=12$  mm. (se va ține seama numai de solicitarea de răsucire).

12. Ansamblul format din două arcuri elicoidale de esچیune circulară, montate în serie (fig. 6.24) având caracteristicile  $D_1=80$  mm,  $n_1=10$  spire și respectiv  $D_2=160$  mm,  $n_2=6$  spire este sollicitat de o sarcină  $P=10$  kN. Se cere:

- să se determine diametrul sârmei pentru cele două arcuri ( $\tau_a=400$  MPa);
- să se determine deplasarea pe verticală a punctului de aplicație al forței.

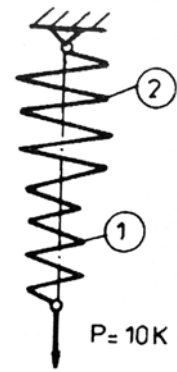


Fig. 6.24

13. Bara orizontală de rigiditate foarte mare (fig. 6.25) este articulată în punctul C. Arcul ① este mai scurt cu  $\Delta=8$  spire. Știind că  $D_1=100$  mm,  $n_1=8$  spire  $d_1=25$  mm și respectiv  $D_2=160$  mm,  $n_2=6$  spire,  $d_2=15$  mm, se cere să se determine:

- eforturile din cele două arcuri la montaj;
- rotirea barei AB în urma montajului;
- sarcina maximă pe care poate să o suporte montajul, dacă  $\tau_a=400$  MPa.

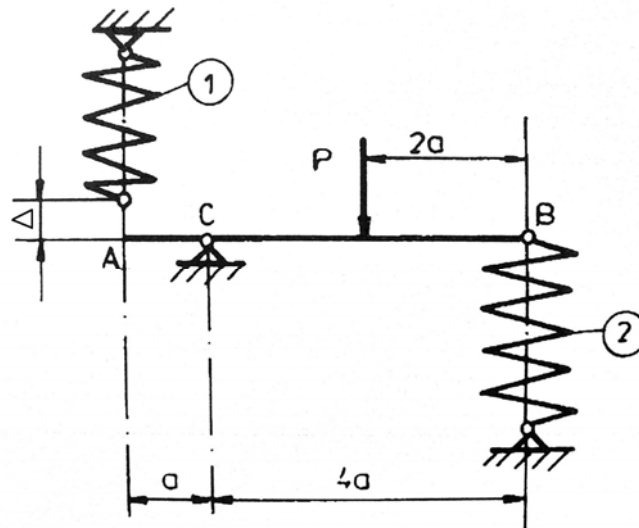


Fig. 6.25

## 7. ÎNCOVOIEREA BARELOR DREPTE

### 7.1. Introducere

O bară este solicitată la încovoiere, când în secțiunile acesteia există numai momente încovoietoare. În majoritatea cazurilor, solicitarea la încovoiere este produsă de forțe transversale (care acționează pe axa barei). În aceste cazuri în secțiunile transversale se produc atât momente încovoietoare cât și forțe tăietoare, iar solicitarea se numește încovoiere simplă.

În cadrul acestui capitol se admite că fiecare forță trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale și nu produce o solicitare suplimentară de torsiune.

Momentul încovoiator solicită bara astfel încât întinde fibrele dintr-o parte și le comprimă pe cele de pe partea opusă, producând în secțiune tensiuni normale. Forța tăietoare solicită bara la forfecare, producând în secțiune tensiuni tangențiale.

În funcție de **natura eforturilor interioare** ce apar în bară, solicitarea poate fi:

- **încovoiere pură**, când în secțiunea transversală a barei există numai momente încovoietoare;

- **încovoiere simplă**, când în secțiunea transversală a barei există atât momente încovoietoare cât și forțe tăietoare.

După **poziția în spațiu a forțelor transversale**, solicitarea la încovoiere poate fi:

- **încovoiere plană**, când toate forțele sunt într-un singur plan central principal de inerție;

- **încovoiere oblică**, când toate forțele aplicate aparțin unui singur plan central longitudinal, diferit de planele principale centrale de inerție;

- **încovoiere strâmbă**, când forțele aplicate sunt dispuse în două sau mai multe plane centrale.

Solicitarea de încovoiere simplă este cea mai întâlnită în aplicațiile ingineresti.

## 7.2. Tensiuni și deformații în bare drepte solicitate la încovoiere pură plană

Se consideră o bară dreaptă a cărei secțiune transversală este simetrică în raport cu planul vertical  $x0y$ , solicitată la încovoiere pură, de un moment de încovoiere dirijat după axa  $0z$  (fig.7.1,a).

Bara este confecționată din material continuu omogen și izotrop, având caracteristica liniar-elastică (deformațiile sunt elastice și proporționale cu tensiunile). Prin deformare, după aplicarea momentului încovoiător, ipoteza secțiunilor plane verificată experimental pentru punctele de pe contur se extinde la toate punctele din secțiune (secțiunile plane și normale pe axa barei înainte de deformare, vor fi plane și normale pe axa barei și după deformare). De asemenea se admite că toate sarcinile aplicate sunt conținute într-un plan principal central de inerție (planul  $x0y$ ).

Din bara considerată se detașează un element de lungime  $dx$  (fig.7.1b). Înainte de aplicarea momentului încovoiător, fibrele elementului  $AD$ ,  $BC$ ,  $MN$ , sunt drepte și paralele cu axa barei  $0x$ . Secțiunile de la capetele elementului ( $AB$ ,  $CD$ ), sunt plane și perpendiculare pe axa barei. După solicitare (se aplică momentul încovoiător  $M$ ), bara se va deforma (fig.7.1.c), astfel încât fibrele elementului devin curbe, iar secțiunile  $AB$  și  $CD$  se vor roti una față de cealaltă cu unghiul  $d\varphi$ .

În urma deformării numai unele fibre își vor păstra lungimea inițială. Aceste fibre poartă denumirea de **fibre neutre** și formează o **suprafață neutră**. Suprafața se consideră plană și se numește **plan neutru**. Când  $M > 0$ , fibrele superioare ale planului se scurtează, iar cele inferioare planului se lungesc. Linia de intersecție a planului neutru cu un plan longitudinal vertical ( $x0y$ ), ce conține axa barei, poartă numele de **fibră neutră**, **axa neutră**, sau **fibra medie**.

O fibră oarecare,  $MN$ , situată la ordonata  $y$  de planul neutru, are înainte de deformare lungimea  $dx = MN = OP = r \cdot d\varphi$ .

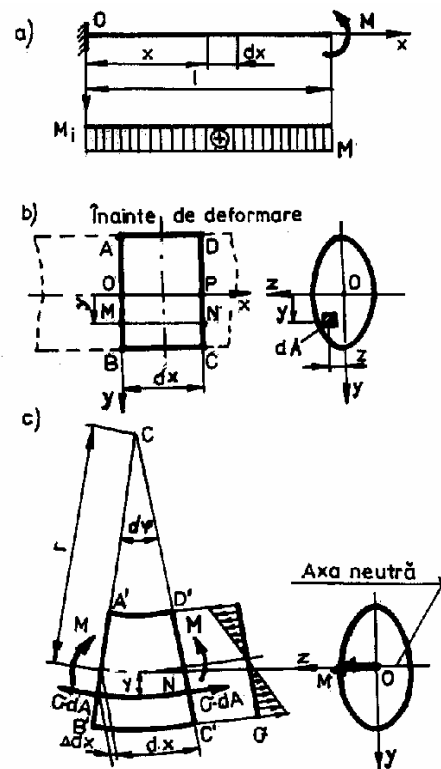


Fig. 7.1



Din această relație se definește rotirea secțiunii:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r}.$$

După deformarea barei, fibra MN = dx, va avea lungimea:

$$dx + \Delta dx = M^a N^a = (r+y) \cdot d\varphi, \text{ iar alungirea va fi: } \Delta dx = y \cdot d\varphi.$$

Lungirea specifică rezultă:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \cdot ds}{ds} = \frac{M^a N^a - MN}{MN} = \frac{(r+y) \cdot d\varphi - r \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{y}{r}. \quad (7.1)$$

Tensiunea normală  $\sigma$ , care ia naștere în secțiune, la ordonata  $y$ , (în dreptul fibrei MN), conform legii lui Hooke, va fi:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = E \cdot \frac{y}{r}. \quad (7.2)$$

Pentru a obține relația dintre momentul încovoietor și tensiunile produse pe suprafața secțiunii transversale se scriu **ecuațiile de echivalență**. În acest caz particular, când toate forțele elementare  $\sigma \cdot dA$  sunt paralele între ele și normale pe suprafața secțiunii transversale, aceste ecuații sunt :

$$\int_{(A)} \sigma \cdot dA = 0, \int_{(A)} \sigma \cdot z \cdot dA = 0, \int_{(A)} \sigma \cdot y \cdot dA = M. \quad (7.3)$$

Dacă se ține seama de expresia (7.2) acestea devin :

$$\int_{(A)} y \cdot dA = 0, \int_{(A)} y \cdot z \cdot dA = 0, \frac{E}{r} \cdot \int_{(A)} y^2 \cdot dA = M. \quad (7.4)$$

Din relațiile obținute se constată următoarele :

- întrucât:

$$\int_{(A)} y \cdot dA = 0,$$

axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale, deoarece numai față de o axă centrală momentul static al unei suprafețe este egal cu zero. Deci, originea sistemului de referință coincide cu centrul de greutate al secțiunii transversale:

Din:

$$\int_{(A)} y \cdot z \cdot dA = 0,$$

rezultă că axele Oy și Oz trebuie să fie axe principale de inerție ale secțiunii transversale:

De la § 5.4:

$$\int_{(A)} y^2 \cdot dA = I_z,$$

este momentul de inerție axial față de axa neutră Oz, a întregii secțiuni transversale.

Axele secțiunii ( $Oy$  și  $Oz$ ) trecând prin centrul de greutate și  $Oy$  fiind axă de simetrie, sunt axe centrale principale de inerție. Dacă se intersectează suprafața neutră cu un plan normal se obține **axa de încovoiere a secțiunii** (axa  $Oz$ ).

Ținând seama de cele deduse mai sus, rotirea secțiunii este definită de relația :

$$\omega = \frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I_z}. \quad (7.5)$$

Deci, rotirea secțiunii este egală cu **curbura** ( $\frac{1}{r}$ ) și este direct proporțională cu momentul încovoiitor și invers proporțională cu **rigiditatea la încovoiere** ( $E \cdot I_z$ ).

Dacă în relația (7.5) se ține seama de relația (7.2), expresia tensiunii normale devine:

$$\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y. \quad (7.6)$$

Aceasta este formula lui L. M. H. Navier și arată că **valoarea tensiunii normale la încovoiere este o funcție liniară față de ordonata punctului, raportată la axa neutră**. Relația lui Navier exprimă o distribuție liniară a tensiunilor: zero în axa neutră și valori maxime și minime în fibrele extreme (fig. 7.1,c). Tensiunea maximă din secțiune este :

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} \cdot y_{\max} = \frac{M}{W_z}. \quad (7.7)$$

În formula (7.7) s-a introdus mărimea geometrică (vezi § 5.7):

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad (7.8)$$

care se numește **modul de rezistență axial**.

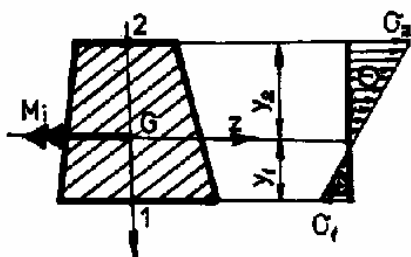


Fig. 7.2

Deși relația lui Navier a fost dedusă și corespunde solicitării la încovoiere pură, se utilizează și la calculul tensiunilor normale la barele solicitate la încovoiere simplă.

Dacă axa de încovoiere nu este axă de simetrie, atunci se determină atât tensiunea maximă de întindere cât și cea maximă de compresiune:

$$\sigma_1 = \frac{M}{W_{z1}} \quad \text{și} \quad \sigma_2 = \frac{-M}{W_{z2}} \quad (7.9,a)$$

În relațiile de mai sus  $W_{z1}$  și  $W_{z2}$  sunt modulele de rezistență definite de relațiile (7.9,b), (fig.7.2).

$$W_{z1} = \frac{I_z}{y_1} \quad \text{și} \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2} \quad (7.9,b)$$

### 7.3. Calculul de rezistență la încovoiere

Relațiile deduse mai sus se utilizează pentru rezolvarea problemelor de rezistența materialelor: de verificare, de calculul capacității de încărcare și de dimensionare. Rezolvarea acestor probleme se face respectând condiția de rezistență  $\sigma_{\max} \leq \sigma_a$ . Relațiile pentru calculul de rezistență la încovoiere se deduc din relația (7.8) și sunt:

- de verificare:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{i\max}}{W_z} \leq \sigma_a, \quad (7.10)$$

- de calculul capacității de încărcare :

$$M_{i\text{cap}} = W_{z\text{ef}} \cdot \sigma_a, \quad (7.11)$$

- de dimensionare :

$$W_{z\text{nec}} = \frac{M_{i\max}}{\sigma_a}. \quad (7.12)$$

Relațiile (7.10), (7.11) și (7.12) se aplică pentru secțiunea cea mai solicitată (secțiunea periculoasă). În cazul barelor (grinzilor) de secțiune constantă, aceasta corespunde cu secțiunea în care **momentul încovoietor este maxim în valoare absolută**. La barele (grinzile) cu variație de secțiune în trepte, se determină pe baza diagramei de momente încovoietoare, pentru fiecare segment, câte o secțiune periculoasă pentru care se face apoi calculul de rezistență.

În secțiunea transversală a barei pot exista concentratori de tensiune, care modifică distribuția liniară a tensiunilor după cum este prezentat în figura 7.3.

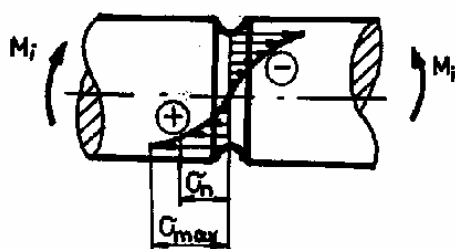


Fig. 7.3

În aceste cazuri relația (7.8) dă numai valoarea **tensiunii `nominale`**  $\sigma_n$ , iar valoarea tensiunii maxime este funcție și de un coeficient de concentrare a tensiunilor  $\alpha_k$  și se calculează cu relația:

$$\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n = \alpha_k \cdot \frac{M_i}{I_z} \cdot y_{\max} \quad (7.13)$$

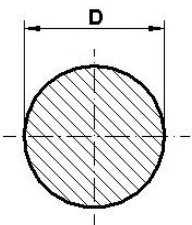
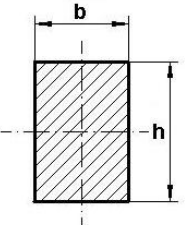
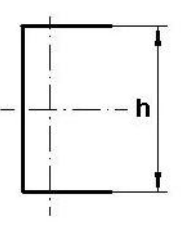
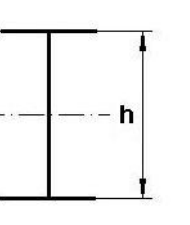
Valorile coeficienților de concentrare a tensiunilor sunt date în manualele inginerești. Valorile acestor coeficienți sunt cu atât mai mari cu cât discontinuitățile geometrice sunt mai pronunțate. De efectul concentrării tensiunilor trebuie ținut seama cu precădere în cazul materialelor fragile.

## 7.4. Forme raționale de secțiuni pentru încovoiere

O bară (grindă) rezistă cu atât mai bine, la solicitarea de încovoiere cu cât modulul de rezistență axial  $W_z$  este mai mare. Valoarea modulului de rezistență axial depinde nu numai de mărimea secțiunii ci și de forma ei. Forma secțiunii este cu atât mai rațională cu cât modulul de rezistență are o valoare mai mare pentru un consum de material cât mai mic.

Altfel spus, o secțiune este cu atât mai rațională cu cât raportul dintre modulul de rezistență axial și aria secțiunii este mai mare. În tab. 7.1 se dau valori ale acestui raport pentru câteva forme uzuale de secțiuni.

Tabelul 7.1

Forma secțiunii				
$\frac{W_z}{A}$	$0,125 \cdot D$	$0,167 \cdot h$	$\approx 0,26 \cdot h$	$\approx 0,3 \cdot h$

Din acest tabel rezultă că secțiunile profilelor laminate I și U, utilizate foarte mult la construcțiile metalice, sunt mult mai raționale decât secțiunile circulare și dreptunghiulare. În cazul acestor profile secțiunea este rațional utilizată întrucât majoritatea materialului se află acolo unde tensiunile au valori mari (fig. 7.4).

Aceste profile trebuie să fie **solicitate de momente încovoietoare ce au direcția axei principale**, adică au  $M = M_z$  și  $I_z = I_1$  (fig. 7.4).

În caz contrar (când momentul acționează după axa  $Oy$ ), întrucât momentul de inerție  $I_y = I_2 = (1/20..1/30) \cdot I_z$ , capacitatea de rezistență la încovoiere a profilului este minimă.

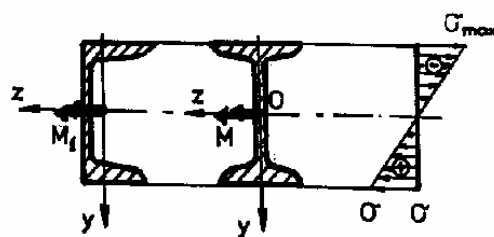


Fig. 7.4

Secțiunile circulare și pătrate au module de rezistență axiale mai mici, deoarece se află mult material dispus în apropierea axei neutre, unde tensiunile normale sunt mici. Secțiunea circulară prezintă avantajul de a rezista la fel de bine în raport cu orice axă centrală și de aceea **este utilizată în special la arbori de mașini**. În acest caz forțele își mențin poziția în spațiu, în schimb se rotește arborele, care trebuie să reziste la fel în orice poziție.

În cazul materialelor care rezistă mai bine la compresiune decât la întindere (ex. fonta) sunt mai raționale acele secțiuni care nu prezintă simetrie față de axa de încovoiere (exemplu secțiunea T, secțiunea trapezoidală fig. 7.5).

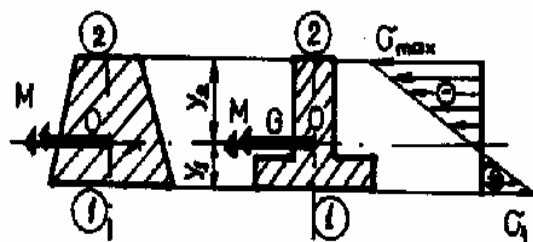


Fig. 7.5

Bara confecționată din materiale fragile trebuie astfel așezată încât tensiunile cele mai mari trebuie să fie la compresiune și nu la tracțiune.

În acest caz trebuie îndeplinite atât condițiile de rezistență la tracțiune cât și cele la compresiune.

$$\sigma_1 = \frac{M_i}{I_z} \cdot y_1 \leq \sigma_{at}; \quad \sigma_2 = \frac{M_i}{I_z} \cdot y_2 \leq \sigma_{ac}. \quad (7.14)$$

Făcând raportul acestor două relații se obțin dimensiunile optime ale secțiunii:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sigma_{at}}{\sigma_{ac}}. \quad (7.15)$$

**Aplicatia 7.1.** Pentru bara din figura 7.6, care poate fi realizată în 3 variante constructive, toate de aceeași greutate, se cere să se determine sarcina capabilă ce o poate suporta fiecare variantă, dacă tensiunea admisibilă este  $\sigma_a = 150$  MPa și  $a = 40$  mm.

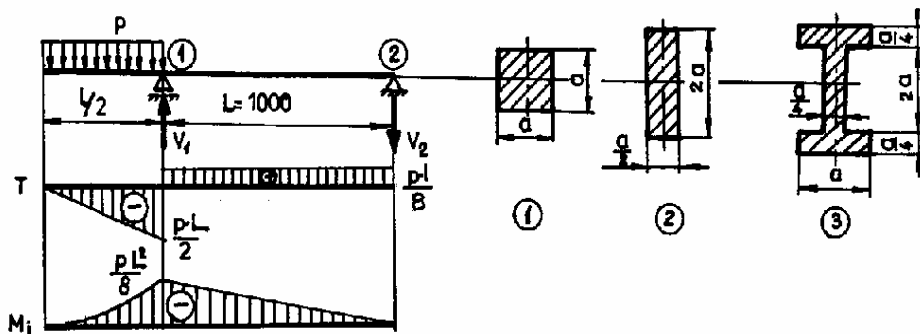


Fig. 7.6

**Rezolvare:**

Pentru cele trei cazuri ariile secțiunilor sunt egale, iar modulele de rezistență axiale au valorile:

$$W_{z1} = \frac{a^3}{6}, \quad W_{z1} = \frac{a^3}{3},$$

$$W_{z3} = \frac{4}{5a} \cdot \left[ \frac{a}{12} \cdot \left( \frac{5a}{2} \right)^3 - \frac{3a}{4} \cdot \frac{(2a)^3}{12} \right] = \frac{77}{120} \cdot a^3.$$

Din condiția de rezistență:

$$M_{i\max} = \frac{p \cdot L^2}{8} = W_z \cdot \sigma_a,$$

rezultă valoarea forței pentru cele trei variante constructive:

$$p_{1\text{cap}} = \frac{8 \cdot a^3}{6 \cdot L^2} \cdot \sigma_a = \frac{8 \cdot 40^3 \cdot 150}{6 \cdot 1000^2} = 12,8 \text{ N/mm} = 12,8 \text{ kN/m}$$

$$p_{2\text{cap}} = \frac{8a^3}{3 \cdot L^2} \cdot \sigma_a = \frac{8 \cdot 40^3 \cdot 150}{3 \cdot 1000^2} = 25,6 \text{ N/mm} = 25,6 \text{ kN/m}$$

$$p_{3\text{cap}} = \frac{8 \cdot 77 \cdot a^3}{120 \cdot L^2} \cdot \sigma_a = \frac{8 \cdot 77 \cdot 40^3 \cdot 150}{120 \cdot 1000^2} = 49,28 \text{ N/mm} = 49,28 \text{ kN/m}.$$

Secțiunea corespunzătoare variantei a treia rezistă cel mai bine la solicitarea de încovoiere, varianta este de 3,85 ori mai rezistentă decât varianta întâi. Deci **alegând judicios forma secțiunii se pot obține reduceri importante de material.**

**Aplicația 7.2.** Să se dimensioneze o bară din fontă cu  $\sigma_{at} = 30 \text{ MPa}$  și  $\sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$ , de lungime  $l = 1300 \text{ mm}$  și având secțiunea în formă de T, cu  $t = \frac{b}{9}$ , solicitată de o forță  $P=24 \text{ kN}$ , (fig.7.7).

**Rezolvare:** În punctele 1 și respectiv 2 ale secțiunii tensiunea maximă va trebui să fie cel mult egală cu tensiunea admisibilă de întindere și respectiv cea de compresiune.

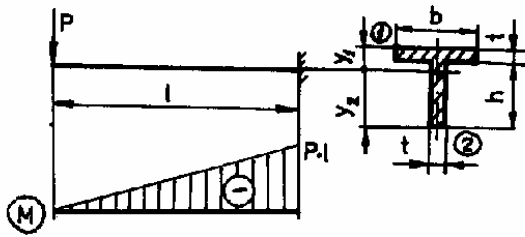


Fig. 7.7

$$\sigma_1 = \frac{M_i}{I_z} \cdot y_1 \leq \sigma_{at} \quad \sigma_2 = \frac{M_i}{I_z} \cdot y_2 \leq \sigma_{ac}$$

Ordonatele  $y_1$  și  $y_2$  măsurate de la axa neutră (axa care trece prin centrul de greutate) rezultă din expresiile:

$$y_1 = \frac{b \cdot t \cdot \frac{t}{2} + h \cdot t \cdot \left(t + \frac{h}{2}\right)}{(b+h) \cdot t} = \frac{b \cdot t + 2h \cdot t + h^2}{a \cdot (b+h)} = \frac{b^2 + 2b \cdot h + 9h^2}{18 \cdot (b+h)}$$

$$y_2 = \frac{h \cdot t \cdot \frac{h}{2} + b \cdot t \cdot \left(h + \frac{t}{2}\right)}{(b+h) \cdot t} = \frac{h^2 + 2b \cdot h + bt}{a \cdot (b+h)} = \frac{b^2 + 18 \cdot b \cdot h + 9 \cdot h^2}{18 \cdot (b+h)}.$$

Din relația 7.15 se obține:

$$\frac{\sigma_1 = \sigma_{at}}{\sigma_2 = \sigma_{ac}} = \frac{y_1}{y_2} \quad \text{sau} \quad \frac{b^2 + 2b \cdot h + 9h^2}{b^2 + 18b \cdot h + 9h^2} = \frac{1}{3}.$$

Din această relație rezultă:

$$b^2 - 6bh + 9h^2 = 0, \text{ cu soluția compatibilă cu problema: } b = 3h.$$

Cu această soluție dimensiunile secțiunii, exprimate în funcție de grosimea  $t$ , sunt următoarele:

$$b = 9t: \quad h = 3t: \quad y_1 = t: \quad y_2 = 3t.$$

Momentul de inerție al secțiunii este:

$$I_z = \frac{t \cdot (3t)^3}{12} + t \cdot (3t) \cdot \left(\frac{3t}{2}\right)^2 + \frac{(9t) \cdot t^3}{12} + t \cdot (9t) \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 = 12t^4$$

iar modulele de rezistență axiale sunt:

$$W_{z1} = \frac{I_z}{y_1} = \frac{12 \cdot t^4}{t} = 12 \cdot t^3 \quad \text{și} \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2} = \frac{12 \cdot t^4}{3t} = 4 \cdot t^3$$

Din condiția de rezistență la încovoiere  $M_{\max} = W_z \cdot \sigma_a$ , se obține grosimea:

$$t_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{12 \cdot \sigma_{\text{at}}}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 10^3 \cdot 1300}{12 \cdot 30}} = 44,25 \text{ mm}$$

Se adoptă:  $t = 45 \text{ mm}$ ;  $b = 405 \text{ mm}$ ;  $h = 135 \text{ mm}$ .

**Aplicația 7.3.** Să se verifice bara din figura 7.8, confecționată din fontă, cu rezistența admisibilă la tracțiune  $\sigma_{\text{at}} = 75 \text{ MPa}$  și rezistența admisibilă la compresiune  $\sigma_{\text{ac}} = 140 \text{ MPa}$ .

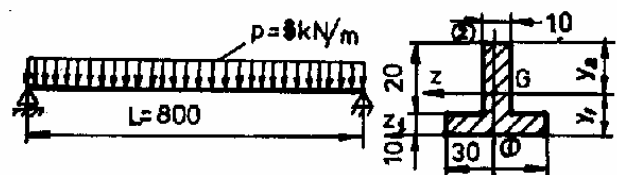


Fig. 7.8

**Rezolvare:**

Poziția axei neutre față de baza inferioară este:

$$y_1 = y_g = \frac{300 \cdot 5 + 200 \cdot 20}{300 + 200} = 11 \text{ mm}, \quad \text{iar:} \quad y_2 = 30 - 11 = 19 \text{ mm}.$$

Momentul de inerție axial rezultă:

$$I_z = \frac{3^4 - 2^4}{12} + 9 \cdot (1,5 - 1,1)^2 - 4 \cdot (1,9 - 1)^2 = 3,617 \text{ cm}^4,$$

iar modulele de rezistență axială sunt:

$$W_{z1} = \frac{I_z}{y_1} = \frac{3,617}{1,1} = 3,288 \text{ cm}^4, \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2} = \frac{3,617}{1,9} = 1,904 \text{ cm}^4.$$

Prin calculul de verificare (comparare a tensiunilor extreme din punctele (1) și (2) cu ale tensiunilor admisibile), se obține:

$$\sigma_{1\text{max}} = \frac{M_{\max}}{W_{z1}} = \frac{p \cdot l^2}{8W_{z1}} = \frac{1 \cdot 800^2}{8 \cdot 3,288 \cdot 10^3} = 24,33 \text{ MPa} < \sigma_{\text{at}}$$

$$\sigma_{2\text{max}} = \frac{M_{\max}}{W_{z2}} = \frac{p \cdot l^2}{8W_{z2}} = \frac{1 \cdot 800^2}{8 \cdot 1,904 \cdot 10^3} = 42,02 \text{ MPa} < \sigma_{\text{ac}}.$$

Deci **BARA REZISTĂ.**

## 7.5. Tensiuni tangențiale în secțiunile barelor (grinzilor) solificate la încovoiere simplă

În secțiunea transversală a unei bare (grindă), solicitată la încovoiere simplă acționează eforturile: moment încovoiător și forță tăietoare. Bara simplu rezemată, încărcată cu forța transversală  $P$ , (fig. 7.9,a), este solicitată la încovoiere simplă. Din această bară se izolează un element de lungime  $dx$  (fig.7.9,b). În secțiunile transversale iau naștere eforturile  $T$ ,  $M$  și respectiv  $T$  și  $M+dM$ .

Se admite că secțiunea barei este simetrică față de axa  $Oy$  (fig. 7.9c) și constantă pe toată lungimea  $L$ . Bara este confecționată dintr-un material omogen și izotrop care satisface legea lui Hooke. Forța tăietoare este dirijată în lungul axei  $Oy$ .

Momentele încovoiătoare  $M$  și  $M + dM$  vor produce în cele două secțiuni tensiunile normale  $\sigma$ , respectiv  $\sigma + d\sigma$ , distribuția acestora pe secțiune este dată de relația lui Navier:

$$\sigma = \frac{M_i}{I_z} \cdot y, \text{ respectiv } \sigma + d\sigma = \frac{M_i + dM_i}{I_z} \cdot y, \quad (7.16)$$

și este prezentată în figura (7.9,d).

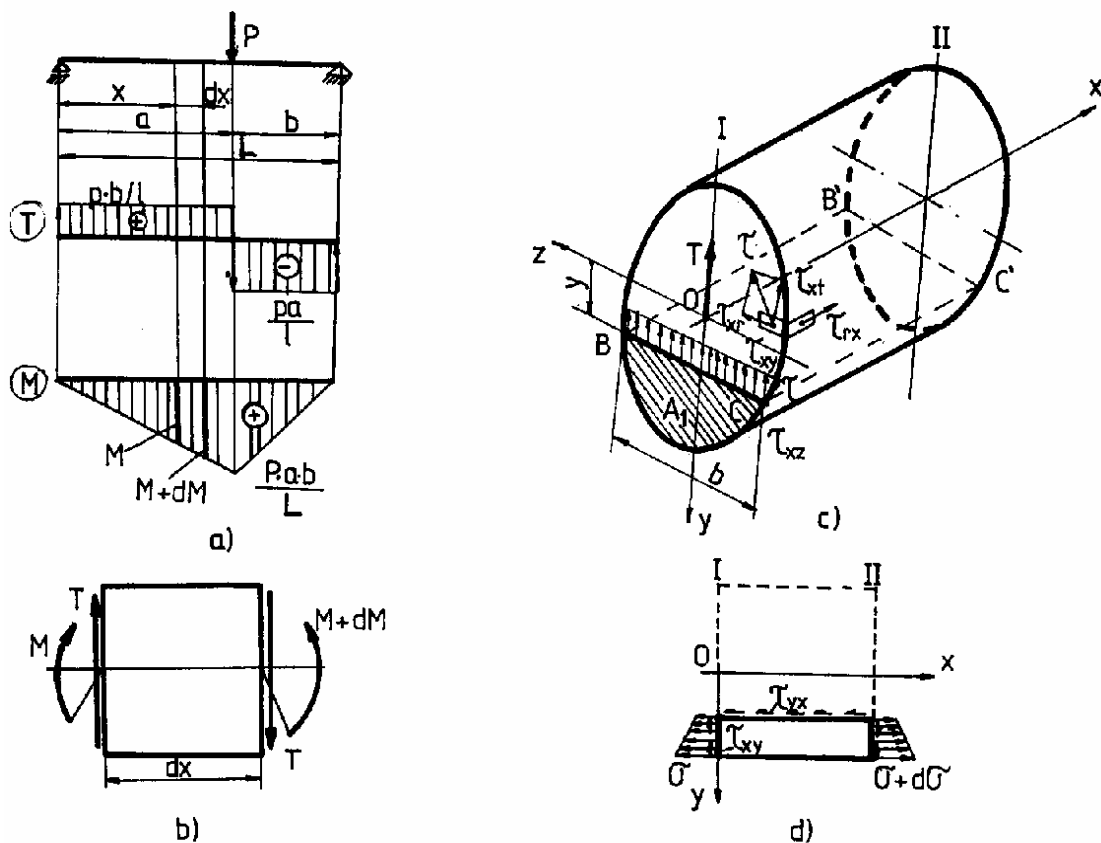


Fig. 7.9



Forța tăietoare  $T$  produce tensiuni tangențiale. Repartizarea acestora în secțiune nu se cunoaște încă. **Tensiunea tangențială, în dreptul punctelor de pe contur trebuie să fie tangentă la contur.** Dacă într-un punct de pe contur tensiunea tangențială  $\tau$  ar avea o direcție oarecare (fig. 7.9c), atunci acesta s-ar descompune în două componente: una  $\tau_{xt}$  tangentă la contur și alta  $\tau_{xr}$  normală la contur. Componentei  $\tau_{xr}$  ar trebui să-i corespundă, conform principiului dualității tensiunilor tangențiale, o tensiune  $\tau_{rx}$  situată pe suprafața exterioară a barei și orientată în lungul barei. Întrucât bara este solicitată la încovoiere simplă și nu se aplică barei astfel de forțe de frecare, longitudinale, rezultă că cele două componente  $\tau_{rx}$  și  $\tau_{xr}$  (de pe suprafața exterioară și din secțiunea transversală) sunt nule. Rezultă că tensiunea tangențială  $\tau$  este egală cu componenta  $\tau_{xt}$  ( $\tau = \tau_{xt}$ ), ceea ce înseamnă că în punctele din vecinătatea conturului există numai tensiuni tangențiale tangente la contur.

Considerăm o linie BC paralelă cu axa de încovoiere Oz (situată la ordonata y de aceasta). Notăm cu  $A_1$  aria secțiunii transversale de sub linia BC. Lungimea segmentului BC se notează cu b. În punctele B și C tensiunile tangențiale  $\tau$  sunt tangente la contur și pot fi descompuse într-o componentă  $\tau_{xy}$  perpendiculară pe axa de încovoiere Oz și o componentă  $\tau_{xz}$  paralelă cu axa de încovoiere. Conform **ipotezei lui D.I. Juravski se admite că valorile componentei  $\tau_{xy}$  sunt egale în dreptul tuturor punctelor de pe linia BC.**

Se consideră un plan paralel cu axa barei, care conține segmentul  $BC = b$ . Acest plan (BCC'B') intersectează elementul  $dx$  după o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile  $b$  și  $dx$ . Pe partea de sub planul considerat ( sub ordonata y ) acționează atât tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$  cauzate de acțiunea forței tăietoare T, cât și tensiunile normale  $\sigma$  și  $\sigma+d\sigma$  cauzate de acțiunea momentului încovoiitor  $M$  în stânga și  $M+dM$  în dreapta.

Ecuția de proiecții a eforturilor de pe elementul de sub planul BCC'B' pe axa Ox, este:

$$\int_{A_1} (\sigma + d\sigma) \cdot dA - \int_{A_1} \sigma \cdot dA - \tau_{xy} \cdot b \cdot dx = 0$$

și ținând seama de relațiile (7.16), ecuația devine:

$$\int_{A_1} \frac{M_i + dM_i}{I_z} \cdot y \cdot dA - \int_{A_1} \frac{M_i}{I_z} \cdot y \cdot dA + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx = 0,$$

valoarea tensiunii tangențiale este:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b \cdot I_z} \cdot \frac{dM_i}{dx} \cdot \int_{A_1} y \cdot dA.$$

Ținând seama că  $\frac{dM}{dx} = T$  este forța tăietoare din secțiune și  $\int_{A_1} y \cdot dA = S_z$  este

momentul static al suprafeței  $A_1$ , (de sub linia BC) față de axa  $Oz$ , se obține:

$$\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z}, \quad (7.17)$$

relație cunoscută sub numele de **formula lui Juravski**.

Din formula lui Juravski rezultă că, valoarea tensiunii tangențiale dintr-o anumită secțiune transversală depinde de valoarea raportului  $S_z/b$ , ceea ce înseamnă că  $\tau_{xy}$  este o funcție de ordonata  $y$ . Pe marginea inferioară și superioară a secțiunii aceste tensiuni sunt nule pentru că  $A_1 = 0$ .

## 7.6. Variația tensiunilor tangențiale la diferite secțiuni

### a) Secțiunea dreptunghiulară.

În acest caz lățimea  $b$  este constantă pe înălțimea secțiunii. Mărimile din formula lui Juravski au valorile:

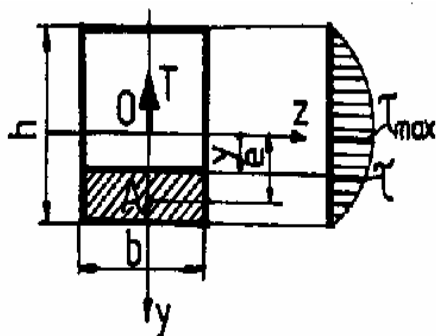


Fig. 7.10

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{b \cdot h^3}{12}; \\ A_1 &= \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b; \\ e &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right); \\ S_z &= A_1 \cdot e = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow S_z &= \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Înlocuind aceste mărimi în relația (7.17), se obține:

$$\tau = \frac{T \cdot S}{b \cdot I_z} = \frac{T \cdot \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{b \cdot h} \cdot \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A} \cdot \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right) \quad (7.19)$$

unde s-a notat cu  $A = b \cdot h$  aria secțiunii transversale.

Relația (7.19) arată că **tensiunile tangențiale variază parabolic** pe înălțimea secțiunii. Tensiunea tangențială maximă rezultă în dreptul axei neutre, pentru  $y = 0$  și are valoarea:

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{2A}. \quad (7.20)$$

Deci, valoarea maximă a tensiunii tangențiale, în cazul forfecării barelor de secțiune dreptunghiulară, este cu 50% mai mare decât valoarea obținută prin calcul convențional la forfecare. (vezi § 7).

### b) Secțiune circulară.

Se consideră o secțiune circulară de diametru  $d$  (fig 7.11). Pentru calculul momentului static, se consideră un element de arie  $dA$ , de lățime  $b$  și înălțimea  $dy$ , aflat la ordonata  $y$ .

Lățimea BC a secțiunii  $A_1$  este:

$$b = 2 \frac{d}{2} \cdot \sin \alpha = d \cdot \sin \alpha,$$

$$\text{iar ordonata } y = \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha,$$

astfel că:

$$dy = -\frac{d}{2} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Aria elementară rezultă:

$$dA = b \cdot dy = -\frac{d^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha \cdot d\alpha.$$

Momentul static al secțiunii  $A_1$ , de sub ordonata  $y$  va fi:

$$S_z = \int_{A_1} y \cdot dA = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \left(-\frac{d^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha\right) \cdot d\alpha = \frac{d^3}{12} \cdot \sin^3 \alpha.$$

Ținând seama că:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \quad I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64}; \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4 \cdot y^2}{d^2},$$

rezultă valoarea tensiunii tangențiale:

$$\tau = \frac{T \cdot \frac{d^3}{3} \cdot \sin^3 \alpha}{d \cdot \sin \alpha \cdot \frac{d^4}{64}} = \frac{16 \sin^2 \alpha}{3d^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right). \quad (7.21)$$

Valoarea tensiunii tangențiale maxime se obține ca și pentru secțiunea dreptunghiulară pentru  $y = 0$  și are valoarea:

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A}. \quad (7.22)$$

Relația (7.21) ne arată că tensiunile tangențiale variază tot parabolic ca în cazul secțiunii dreptunghiulare.

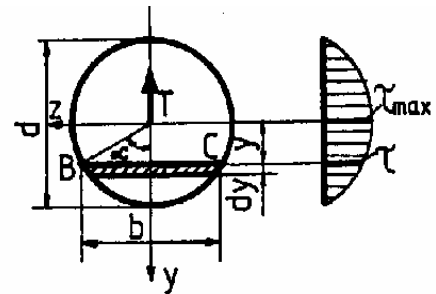


Fig. 7.11

**Aplicația 7.4.** Să se traseze diagramele de variație a tensiunilor tangențiale pentru secțiunea din figura 7.12.

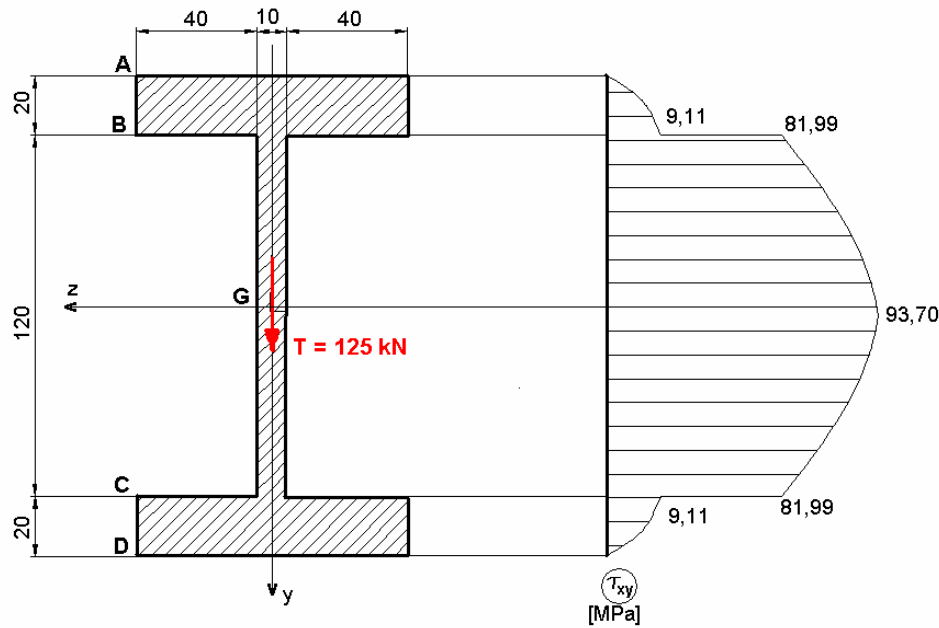


Fig. 7.12

**Rezolvare:**

Mărimile geometrice ale secțiunii necesare sunt:

$$I_z = \frac{9 \cdot 16^3 - 8 \cdot 12^3}{12} = 1920 \text{ cm}^3,$$

$$S_z^A = S_z^D = 0,$$

$$S_z^B = S_z^C = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126 \text{ cm}^3,$$

$$S_z^G = S_z^B + 6 \cdot 1 \cdot 3 = 144 \text{ cm}^3.$$

Utilizând relația (7.17) se determină tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$ :

$$\tau_{xy}^A = \tau_{xy}^D = 0,$$

$$\tau_{xy}^{Bt} = \tau_{xy}^{Ct} = \frac{T \cdot S_z^B}{b_t \cdot I_z} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 126 \cdot 10^3}{90 \cdot 1920 \cdot 10^4} = 9,11 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy}^{Bi} = \tau_{xy}^{Ci} = \frac{T \cdot S_z^B}{b_i \cdot I_z} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 126 \cdot 10^3}{10 \cdot 1920 \cdot 10^4} = 81,99 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy}^G = \frac{T \cdot S_z^G}{b_i \cdot I_z} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 144 \cdot 10^3}{10 \cdot 1920 \cdot 10^4} = 93,70 \text{ MPa}.$$

Reprezentarea acestor tensiuni este dată în fig. 7.12.

## 7.7. Lunecarea longitudinală și împiedicarea ei

Se consideră două bare identice suprapuse care au secțiunea transversală dreptunghiulară (fig 7.13,a).

Ansamblul format din cele două bare simplu rezemate la capete se încarcă cu o forță transversală  $P$ . După cum barele sunt îmbinate sau nu (prin pene, nituri, șuruburi, etc) pot să apară doua stări distincte de tensiune:

a) **Barele nu sunt îmbinate**, astfel că ele se deformează independent una față de cealaltă. Dacă forța de frecare, dintre cele două bare, este mică și se poate neglija, atunci cele două suprafețe în contact alunecă una față de cealaltă. Fenomenul se numește **lunecare longitudinală** și este cauzat de alungirea, prin încovoiere, a fibrelor de jos ale barei superioare 1 și scurtarea fibrelor de sus ale barei inferioare 2. Considerând că cele două bare se deformează identic, momentul încovoiator capabil al sistemelor de bare neîmbinate este:

$$M_{\text{cap}} = 2 \cdot \sigma_a \cdot W_z = \frac{b \cdot h^2}{3}.$$

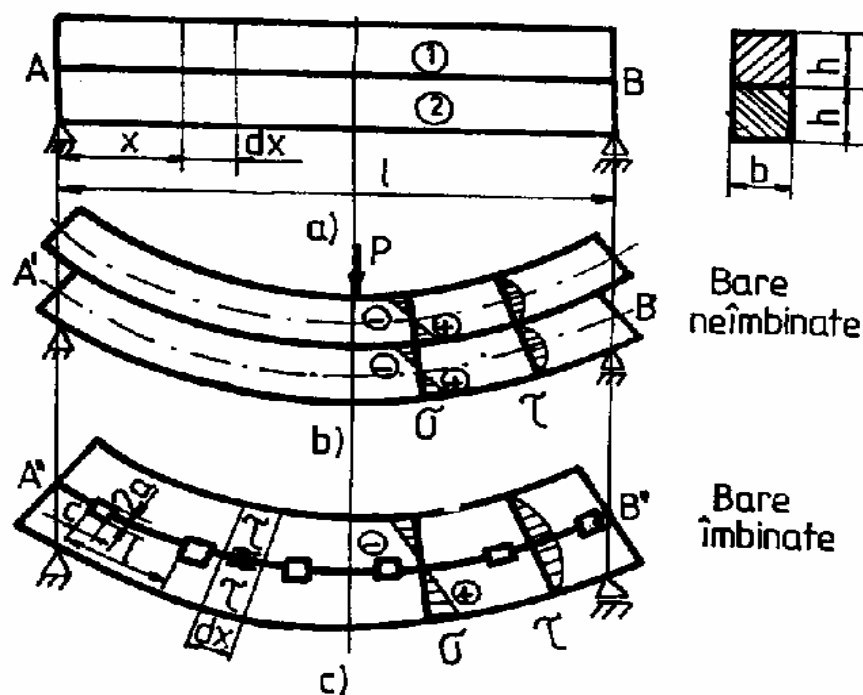


Fig. 7.13

b) **Barele sunt îmbinate**, astfel că ele lucrează ca o singură bară compusă solicitată la încovoiere. În acest caz îmbinările împiedică lunecarea longitudinală (fig. 7.13,c). Bara compusă rigidizată este mai rezistentă decât ansamblul celor două bare nerigidizate și în acest caz momentul încovoiator capabil este:

$$M_{\text{cap}} = \sigma_a \cdot W_z = \sigma_a \cdot \frac{b \cdot (2h)^2}{6} = \sigma_a \frac{2b \cdot h^2}{3}.$$

Rezultă că, prin utilizarea barelor suprapuse, ce au lunecarea longitudinală împiedicată, se obțin bare mai rezistente. În tehnică se utilizează frecvent bare compuse (cu inima plină, realizate prin sudură, nituire, etc.). În funcție de mărimea momentului încovoietor, pentru construcțiile metalice se adoptă, de obicei, următoarele soluții:

- se utilizează profile laminate pentru momente încovoietoare relativ mici (Isau[ ]);
- se utilizează bare compuse din platbenzi și profile laminate pentru valori intermediare ale momentului încovoietor (fig.7.14,a);
- se utilizează grinzi cu zăbrele pentru momente încovoietoare foarte mari (fig.7.14,b).

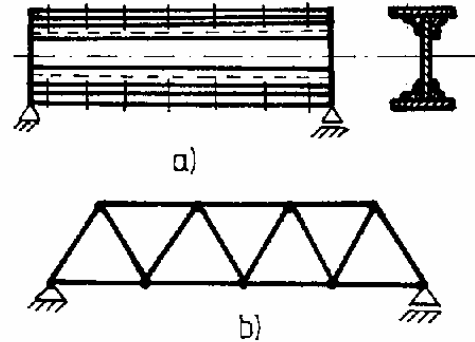


Fig. 7.14

Calculul barelor cu secțiuni transversale compuse presupune rezolvarea a două probleme de rezistență:

**a)** Dimensionarea secțiunii barei numai la încovoiere pură, astfel ca bara compusă să reziste la momentul încovoietor maxim (de obicei se adoptă forma și dimensiunile secțiunii transversale și apoi se verifică).

**b)** Dimensionarea îmbinării dintre elementele compuse, astfel încât să se asigure rezistența îmbinărilor la lunecare longitudinală. Pentru a face calculul de rezistență al elementelor de îmbinare se consideră bara compusă din două elemente identice (fig.7.13). Lunecarea relativă a celor două elemente suprapuse, în planul AB, este datorată tensiunilor tangențiale, ce apar în acest plan. Forța produsă de tensiunile tangențiale  $\tau_{yx}$ , pe o distanță elementară  $dx$ , numită **forța de lunecare elementară** este:

$$dN_L = \tau_{yx} \cdot b \cdot dx,$$

unde:

$\tau_{yx}$  rezultă din relația lui Juravski (7.17),

iar  $b$  este lățimea barei în planul de lunecare.

Înlocuind valoarea lui  $\tau_{yx}$  se obține:

$$dN_L = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z} \cdot b \cdot dx = \frac{T \cdot S_z}{I_z} \cdot dx.$$

Pe o lungime  $L$  de bară, forța de lunecare este:

$$N_L = \int_L dN_L = \int_L \frac{T \cdot S_z}{I_z} \cdot dx. \quad (7.23)$$

Dacă bara are secțiunea constantă:

$$N_L = \frac{S_z}{I_z} \cdot \int_L T \cdot dx = \frac{S_z}{I_z} \cdot \Omega_T,$$

unde:

$$\Omega = \int_L T \cdot dx, \text{ este suprafața diagramei forței tăietoare de pe lungimea } L.$$

Pentru orice secțiune compusă din mai multe elemente se pune totdeauna problema alunecării longitudinale și a împiedicării ei.

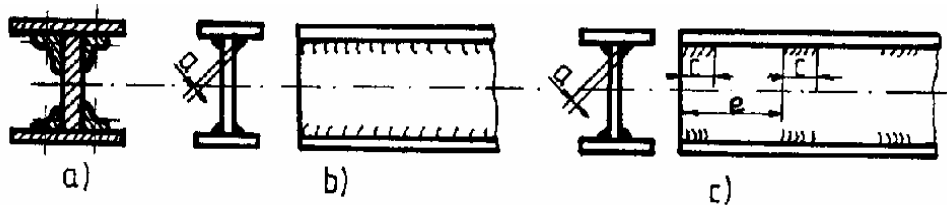


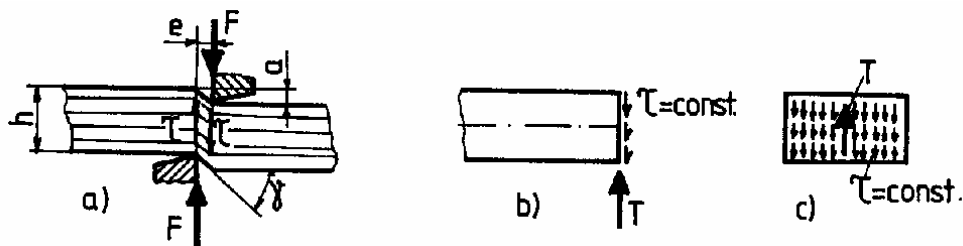
Fig. 7.15

La barele din lemn împiedicarea alunecării longitudinale se poate realiza prin pene transversale (fig.7.13,c) sau prin încliere. La barele metalice se pot realiza secțiuni compuse împiedicând alunecarea longitudinală prin nituire, sudură sau prin șuruburi (fig. 7.15).

## 7.8 Forfecarea în piesele cu secțiunea mică

A acțiunea simultană a două forțe egale și de sens contrar, perpendiculare pe axa barei, asemenea lamelor unei foarfece (fig.7.16,a), solicită bara la **forfecare** sau **tăiere**.

Asemenea solicitări au loc în nituri, capse, știfturi, suduri de colț, precum și în cazurile de tăiere, ștanțare etc.



Starea de tensiune generată de acțiunea forțelor ca în figura (7.16,a) este destul de complicată, întrucât **solicitarea de forfecare este însoțită de întindere, compresiune și încovoire**. Calculul exact, în acest caz, este destul de laborios și nu este analizat în cursul de Rezistența materialelor. De aceea, în practica inginerescă, pentru piesele de cu secțiune îngustă (**h mic**), când distanța **e**, dintre liniile de acțiune a celor două forțe, ce produc forfecarea, este mică, celelalte solicitări se neglijează. În acest caz asupra

secțiunii se consideră că acționează numai efectul forței tăietoare  $T = F$ , conținută în planul secțiunii.

Sub acțiunea forței tăietoare se produc tensiuni tangențiale  $\tau$  și deformații unghiulare  $\gamma$  (lunecări). **În cazul pieselor de secțiune mică se admite ipoteza de repartiție uniformă a tensiunilor tangențiale pe secțiunea transversală.** În baza acestei ipoteze, din ecuația de echilibru pentru forța din stânga a barei (fig. 7.16,b și c), se deduce:

$$T = \int_A \tau \cdot dA = \tau \cdot \int_A dA = \tau \cdot A,$$

din care rezultă relația;

$$\tau = \frac{T}{A}, \quad (7.24)$$

ce se utilizează, în condiția  $\tau \leq \tau_a$ , în calculul de rezistență al secțiunilor înguste.

Când secțiunea nu mai poate fi considerată îngustă, tensiunea tangențială nu poate fi considerată constantă și deci relația (7.24) nu poate fi utilizată. Cazul va fi studiat ulterior la încovoierea simplă (vezi § 9.5).

Rezistența admisibilă la forfecare pentru nituri, știfturi, pene, buloane, etc. se ia:

$$\tau_a = (0,5 \dots 0,8) \cdot \sigma_a, \quad (7.25,a)$$

iar pentru sudurile de colț:

$$\tau_{as} = 0,65 \cdot \sigma_a. \quad (7.25,b)$$

În Anexa 1 se dau valorile pentru rezistențele admisibile la forfecare la materialele cele mai utilizate.

În cazul ștanțării se consideră:

$$\tau_r = 0,85 \cdot \sigma_r. \quad (7.25,c)$$

**Aplicația 7.5.** Să se calculeze forța necesară pentru ștanțarea unei găuri circulare,  $d = 45$  mm, într-o piesă din tablă având grosimea  $t = 4$  mm, din oțel cu  $\sigma_r = 450$  MPa.

$$\tau_r = 0,85 \cdot \sigma_{r \max} = 0,85 \cdot 450 = 382,5 \text{ MPa},$$

$$A = t \cdot d \cdot \pi = 4 \cdot 45 \cdot \pi = 565,5 \text{ mm}^2,$$

$$T = \tau_r \cdot A = 382,5 \cdot 565,5 = 2163 \cdot 10^2 \text{ N}.$$

Se adoptă: **P=220 kN.**

În cazul solicitării la forfecare deformațiile și deplasările produse de solicitare nu prezintă interes practic. Dacă tensiunea maximă nu depășește limita de proporționalitate și deformațiile sunt mici ( $\gamma \cong t\gamma$ ), deplasarea  $a$  (fig.7.16,b) rezultă:

$$a = e \cdot \gamma = e \cdot \frac{\tau}{G} = \frac{T \cdot e}{G \cdot A}, \quad (7.26)$$



unde  $G$  este modulul de elasticitate transversal, iar produsul  $G \cdot A$  este **rigiditatea la forfecare**.

## 7.9 Calculul de rezistență al îmbinărilor

Calculul de rezistență al îmbinărilor, se face din condiția ca rezistența elementelor de îmbinare să fie mai mare sau cel mult egală cu forța de lunecare longitudinală  $R_l \geq N_L$ , astfel:

a) Pentru îmbinări cu pene transversale (fig.7.13,c):

$$\tau_a \cdot b \cdot c \geq N_{Le}, \quad (7.27)$$

unde s-a notat cu:

- $\tau_a$  tensiunea admisibilă pentru materialul penelor;
- $c$  lățimea penelor utilizate la îmbinarea barelor;
- $b$  lățimea barei în secțiunea de lunecare;
- $N_{Le}$  forța de lunecare longitudinală corespunzătoare distanței  $e$  dintre două

penes.

Din relația de sus se calculează pasul  $e$ , la care se vor monta penele (dacă au fost alese în prealabil dimensiunile acestora, sau lățimea penelor dacă s-a ales pasul  $e$ , în prealabil, cu ajutorul relației:

$$\tau_a \cdot b \cdot e \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int T \cdot dx. \quad (7.28)$$

b) Pentru cazul îmbinărilor cu șuruburi sau nituri (fig.7.13,a) relația (7.27) devine:

$$n \cdot \tau_a \cdot i \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int T \cdot dx, \quad (7.29)$$

relație din care se obține diametrul  $d$  (diametrul interior al șuruburilor sau diametrul niturilor dacă s-a ales pasul) sau se obține pasul la care se vor monta șuruburile, respectiv niturile dacă se alege în prealabil diametrul ( $n$ , este numărul de nituri din secțiunea considerată, iar  $i$  este numărul de planuri de forfecare pentru nituri sau șuruburi).

c) Pentru îmbinări sudate, relația de calcul este:

$$\tau_a \cdot i \cdot a \cdot L \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int T \cdot dx, \quad (7.30)$$

unde:

- $a$  este grosimea sudurii;
- $\tau_{as}$  este tensiunea admisibilă pentru cordonul de sudură;

-  $i$  numărul de cordoane de sudură din secțiunea considerată.

Grosimea cordonului de sudură va fi:

$$a \geq \frac{S_z}{2\tau_{as} \cdot I_z \cdot L} \int T \cdot dx. \quad (7.31)$$

Pentru cazul în care grosimea cordonului de sudură rezultă mult mai mic decât grosimea sudurii standardizate (care este în funcție de grosimea minimă a platbandelor de sudat) se adoptă sudura pe porțiuni (fig.7.15.c) și relația (7.27) devine:

$$2\tau_{as} \cdot a \cdot L_s \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int T \cdot dx.$$

În această relație se înlocuiește  $a$  cu grosimea sudurii standardizate și se obține lungimea sudurii necesare  $L_{s,nec}$ . Pasul  $e$  la care se execută: la lungimea sudurii calculată  $L_{s,nec}$ , se adaugă de două ori grosimea sudurii, deoarece începutul și sfârșitul sudurii nu au aceleași caracteristici mecanice ca cele teoretice luate în calcul.

$$L_s = L_{s,nec} + 2a. \quad (7.32)$$

**Aplicația 7.15.** Să se determine sarcina maximă care poate să o suporte bara din fig.7.17, ținând seama numai de solicitarea de încovoiere dacă  $\sigma_a = 150$  MPa și să se dimensioneze sudura dacă  $\tau_{as} = 100$  MPa.

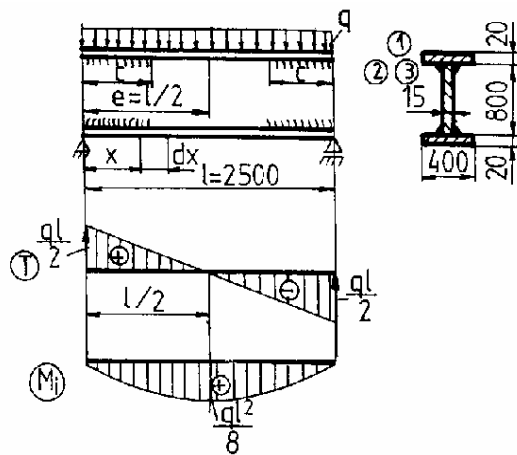


Fig. 7.17

**Rezolvare:**

Momentul de inerție axial este:

$$I_z = \frac{40 \cdot 84^3}{12} - \frac{37,5 \cdot 80^3}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_z = 375680 \text{ cm}^4$$

iar modulul de rezistență axial:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{375680}{42} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_z = 8945 \text{ cm}^3$$

Momentul static al unei tălpi care poate luneca va fi:

$$S_z = 40 \cdot 2 \cdot 41 = 3280 \text{ cm}^3.$$

Sarcina capabilă este:

$$q_{\text{cap}} = \frac{8W_z \cdot \sigma_a}{L^2} = \frac{8 \cdot 8945 \cdot 10^3 \cdot 150}{2500^2} = 1717 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Se adoptă:  $q = 1700$  kN/m.

Pentru calculul îmbinării sudate se aplică relația (7.37) și se obține:

$$a \geq \frac{S_z}{2I_z \cdot \pi \cdot \tau_{as} \cdot L} \cdot \int_L T_L \cdot dx = 2 \cdot \frac{S_z}{2I_z \cdot \tau_{as}} \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} q \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) \cdot dx = \frac{S_z}{I_z \cdot \tau_{as}} \cdot \frac{q \cdot L}{8} =$$

$$= \frac{3280 \cdot 10^3 \cdot 1700 \cdot 2500}{275680 \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 8} = 6,32 \text{ mm};$$

Deoarece grosimea cusăturii  $a$ , reieșită din calcul este mult mai mică decât cea corespunzătoare din STAS ( $a=10$  mm) se adoptă  $a=10$  mm și pasul  $e = 1250$  mm și se face calculul pentru sudura pe porțiuni (relația 7.30):

$$2\tau_{as} \cdot a \cdot L_s \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int_e T \cdot dx,$$

$$2\tau_{as} \cdot a \cdot L_s \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2},$$

iar lungimea sudurii va fi:

$$L_{s\text{nec}} \geq \frac{S_z}{2 \cdot \tau_{as} \cdot I_z} \cdot q \cdot \frac{L^2}{8} = \frac{3280 \cdot 10^3 \cdot 1700 \cdot 2500^2}{16 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 375680 \cdot 10^{49}} = 579,8 \text{ mm}.$$

Se adoptă sudura pe porțiuni cu pasul  $e = 1250$  mm și lungimea cusăturii  $L_s = L_{s\text{nec}} + 2a = 600$  mm (fig.7.17).

**Aplicația 7.16.** Să se traseze diagramele de variație a tensiunilor în secțiunea periculoasă pentru bara din figura 7.18 și să se dimensioneze sudura știind că  $\tau_{as} = 80$  MPa.

**Rezolvare:**

Marimile geometrice ale secțiunii sunt:

$$I_z = \frac{6 \cdot 9,6^3}{12} - \frac{5,4 \cdot 8^3}{12} = 212 \text{ cm}^4,$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{\text{max}}|} = \frac{212}{4,8} = 44,17 \text{ cm}^3,$$

$$S_{z1} = 0,$$

$$S_{z2} = S_{z3} = 6 \cdot 0,8 \cdot 4,4 = 21,12 \text{ cm}^3,$$

$$S_{zG} = S_{z3} + 4 \cdot 0,6 \cdot 2 = 25,92 \text{ cm}^3.$$

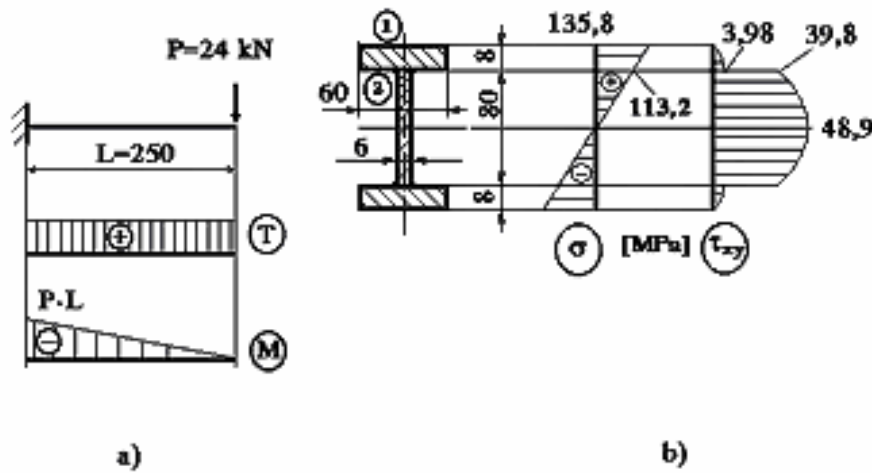


Fig. 7.18

Tensiunile pentru secțiunea din încastrare sunt:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{i,\max}}{W_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 250}{44,17 \cdot 10^3} = 135,8 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{M_{i,\max}}{I_z} \cdot y^2 = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 250}{212 \cdot 10^4} \cdot 40 = 113,2 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy1} = 0;$$

$$\tau_{2xy} = \frac{T \cdot S_{z2}}{b_2 \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 21,12 \cdot 10^3}{60 \cdot 212 \cdot 10^4} = 3,98 \text{ MPa};$$

$$\tau_{3xy} = \frac{T \cdot S_{z3}}{b_3 \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 21,12 \cdot 10^3}{6 \cdot 212 \cdot 10^4} = 39,85 \text{ MPa},$$

$$\tau_{Gxy} = \frac{T \cdot S_{zG}}{b \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 25,92 \cdot 10^3}{6 \cdot 212 \cdot 10^4} = 48,91 \text{ MPa},$$

iar variația lor este redată în figura (7.18,b).

Dimensionarea sudurii se face cu relația (7.30) și se obține:

$$a \geq \frac{S_z}{2 \cdot I_z \cdot \tau_{as}} \cdot \int_1 T \cdot dx = \frac{T \cdot S_z}{2 \cdot I_z \cdot \tau_{as}} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 21,12}{2 \cdot 212 \cdot 10^4 \cdot 80} = 1,494 \text{ mm}.$$

Deoarece grosimea sudurii este mult mai mică decât cea standardizată ( $a = 6 \text{ mm}$ ), se dimensionează sudura pe porțiuni alegând pasul  $e = L/2 = 125 \text{ mm}$ , cu relația (7.31):

$$2 \cdot \tau_{as} \cdot a \cdot L_s \geq \frac{S_{z2}}{I_z} \cdot \int_e T \cdot dx$$

sau

$$L_{\text{s nec}} \geq \frac{S_z \cdot \Omega_{T_e}}{2 \cdot \tau_{\text{as}} \cdot a \cdot I_z} = \frac{2,12 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot 125}{2 \cdot 6 \cdot 80 \cdot 212 \cdot 10^4} = 31,13 \text{ mm}$$

Se adoptă  $L_s = L_{\text{s nec}} + 2a = 43 \text{ mm}$ .

Deci, pentru bara dată se fac două cusături la capete de  $L_s = 43 \text{ mm}$ .

## 7.10 Bare de egală rezistență solicitate la încovoiere simplă

În general barele se dimensionează la încovoiere pe baza momentului încovoiitor maxim, utilizându-se bare prismatice (de secțiune constantă pe toată lungimea barei). Folosirea barelor prismatice (de secțiune constantă pe toată lungimea barei), se recomandă pentru încărcări complicate, cu multe sarcini pentru care rezultă o diagramă de momente cu mai multe valori extreme ce nu diferă mult între ele.

Dimensionarea rațională a barelor solicitate la încovoiere se face astfel ca tensiunea maximă din orice secțiune a barei să fie egală cu rezistența admisibilă. Astfel de bare poartă denumirea de **bare de egală rezistență la încovoiere**. Mai jos se analizează două exemple de asemenea bare.

### 7.10.1. Bare cu secțiunea circulară

Se consideră o bară simplu rezemată solicitată de o forță concentrată  $P$  (fig.7.19,a). Momentul încovoiitor variază liniar având valoarea maximă în dreptul forței concentrate (fig.7.19,b), iar într-o secțiune oarecare este dat de relația:

$$M = \frac{P \cdot b}{L} \cdot x.$$

Din condiția de egală rezistență la încovoiere:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{W_z} = \sigma_a,$$

rezultă:

$$W_{z \text{ nec}} = \frac{M_i}{\sigma_a},$$

sau ținând seama de secțiunea circulară și de expresia momentului:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot P \cdot b \cdot x}{\pi \cdot \sigma_a \cdot L}}, \quad (7.33)$$

cea ce ne dă legea de variație a diametrului în lungul barei, care este o variație după o curbă de gradul trei (fig.7.19.c) și care are diametrul maxim:

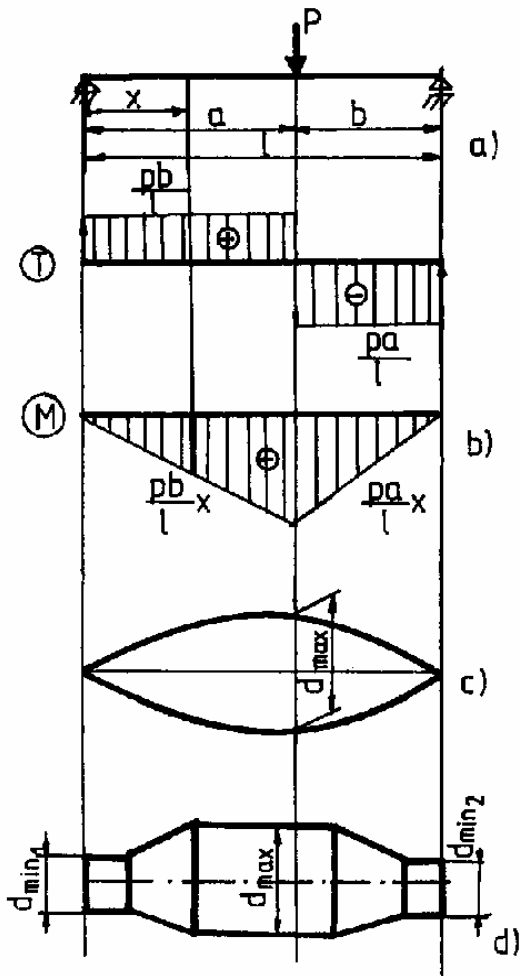


Fig. 7.19

Pentru alte moduri de încărcare, legea de variație a diametrului barei este dată de relația:

$$\frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{M_i}{\sigma_a},$$

sau:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_i}{\pi \cdot \sigma_a}}. \tag{7.36}$$

$$d_{\max} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot P \cdot a \cdot b}{\pi \cdot \sigma_a \cdot L}} \tag{7.34}$$

În practică nu pot fi realizate astfel de bare (arbori) în condiții de eficiență și ca atare se adoptă soluția barei cu mai multe tronsoane, de diametre diferite (fig.7.19,d).

Pentru calculul diametrelor minime necesare la capetele barei (care din legea de variație ar fi zero), se dimensionează la forfecare:

$$A_{\text{nec}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\tau_a},$$

de unde rezultă:

$$d_{1\text{nec}} = \sqrt{\frac{16 \cdot P \cdot b}{3\pi \cdot \tau_a \cdot L}}, \tag{7.35,a}$$

și

$$d_{2\text{nec}} = \sqrt{\frac{16 \cdot P \cdot a}{3\pi \cdot \tau_a \cdot L}}. \tag{7.35,b}$$

### 7.10.2. Bare de secțiune dreptunghiulară

Barele de secțiune dreptunghiulară de egală rezistență la încovoiere se execută menținând constantă una din dimensiunile secțiunii.

Se consideră o bară în consolă încărcată cu o sarcină  $P$  (fig.7.20,a). Momentul încovoiător într-o secțiune oarecare la abscisa  $x$  este:  $M = -P \cdot x$ . Modulul de rezistență al secțiunii dreptunghiulare este:  $W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$ .

Punând condiția de egală rezistență pentru orice secțiune  $x$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_i}{W_z} = \sigma_a, \text{ se obține: } \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{M_i}{\sigma_a}.$$

Dacă se menține constantă lățimea  $b$ , atunci înălțimea  $h$ , a secțiunii rezultă din relația:

$$h = \sqrt{\frac{P \cdot x}{b \cdot \sigma_a}}. \quad (7.37)$$

Deci, în acest caz bara trebuie să aibă înălțimea după o variație parabolică (fig.7.20.b).

Dacă se menține constantă înălțimea  $h$ , rezultă:

$$b = \frac{6 \cdot P \cdot x}{h^2 \cdot \sigma_a}, \quad (7.38)$$

iar bara trebuie să aibă lățimea variabilă liniar (formă triunghiulară, fig.7.20,c).

În practică, o astfel de bară se realizează din fâșii de lățime  $b_0$  care se pun una peste alta, rezultând bara cunoscută sub numele de arcul în foi.

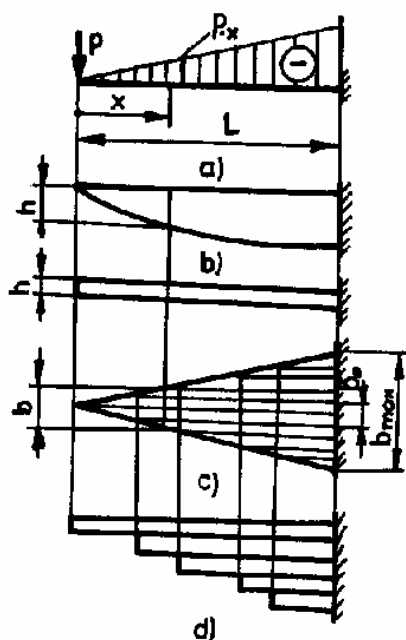


Fig. 7.20

Lățimea  $b_0$  se calculează din condiția de rezistență la forfecare a capătului barei:

$$A_{\text{nec}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{\tau_a} \text{ sau } b_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{\tau_a \cdot h}.$$

## 7.11. Întrebări - test

1. Ce este încovoierea?
2. Ce este încovoierea pură? Dar încovoierea simplă?
3. Ce este încovoierea plană? Dar încovoierea oblică, respectiv strâmbă?
4. Ce tensiuni se produc la încovoierea pură plană? Dar la cea simplă plană?
5. Ce este suprafața neutră? Dar axa neutră? Dar fibra medie?
6. Unde apare tensiunea maximă  $\sigma$  la o bară încovoiată?
7. Cum variază tensiunea  $\tau$  la forfecarea pieselor de grosime mică?
8. De ce se mărește numărul de nituri calculate cu 20%?
9. Scrieți și explicați relația lui Navier.
10. Scrieți și explicați relația lui Jurawski.
11. Care sunt secțiunile raționale la grinzile încovoiate?
12. Ce este lunecarea longitudinală?
13. Ce este o grindă de egală rezistență? Ce caracteristici are?
14. Ce este arcul în foi? Care este modelul lui fizic?
15. Trasați diagrama de variație a tensiunilor  $\sigma$  pe înălțimea unei grinzi supusă la încovoiere plană pură.



## 7.12. Probleme propuse

1. Să se dimensioneze grinda din fig. 7.21 știind că este confecționată dintr-un profil I ( $\sigma_a=150$  MPa).

2. Să se determine sarcina capabilă  $p$ , ce o poate suporta grinda din fig. 7.22, știind că este confecționată din două profile U10 ( $\sigma_a=150$  MPa).

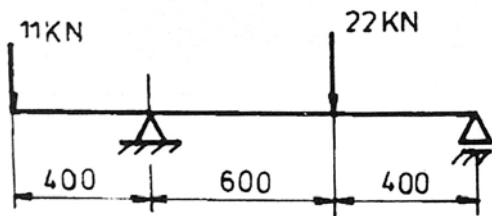


Fig. 7.21

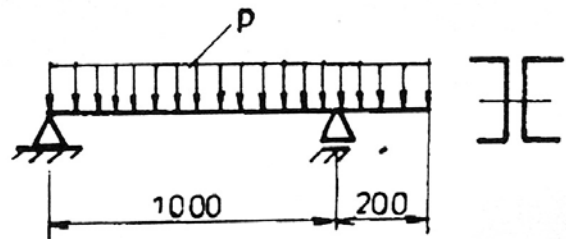


Fig. 7.22

3. Să se dimensioneze grinda din fig. 7.23 știind că se cunosc:  $p=18$  kN/m,  $a=150$  mm și  $\sigma_a=150$  MPa.

4. Să se verifice grinda din fig. 7.24 știind că este confecționată dintr-un profil I10 ( $\sigma_a=150$  MPa).

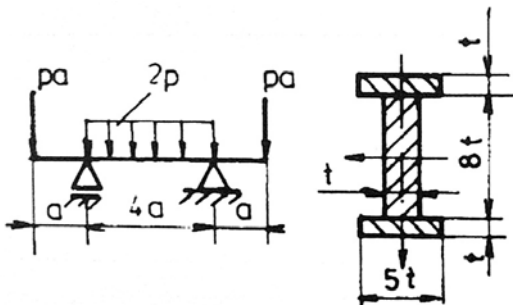


Fig. 7.23

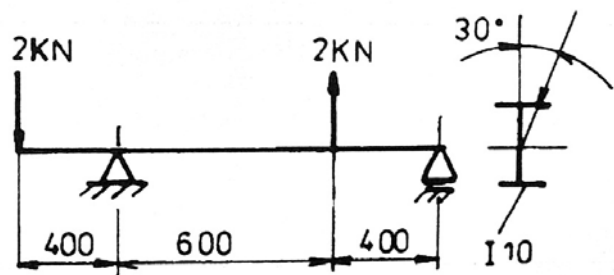


Fig. 7.24

5. Să se dimensioneze grinda din fig. 7.25 dacă aceasta este confecționată din oțel cu  $\sigma_a=150$  MPa.

6. Să se determine sarcina capabilă să o suporte grinda din fig. 7.26 dacă se cunoaște faptul că  $a=250$  mm și  $\sigma_a=150$  MPa.

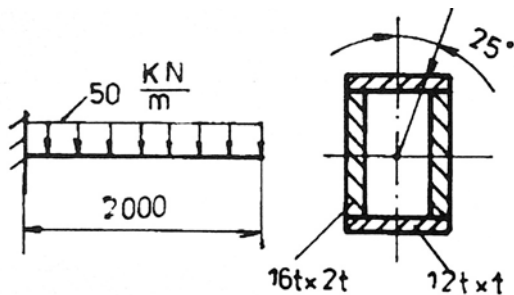


Fig. 7.25

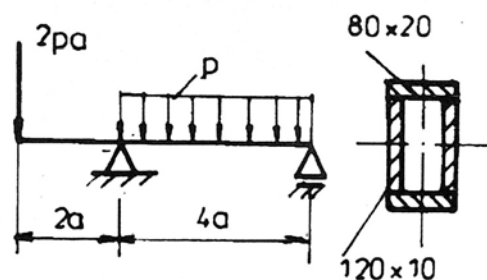


Fig. 7.26

7. Să se verifice grinda prezentată în fig. 7.27, știind că  $\sigma_a=150$  MPa.

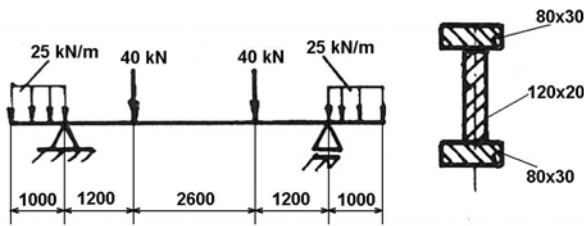


Fig. 7.27

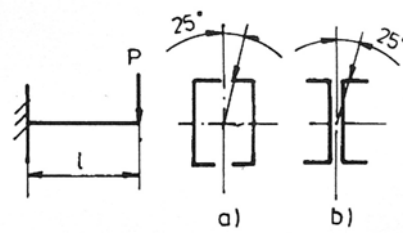


Fig. 7.28

8. Grinda din fig. 7.28 este confecționată din două profile U20. Cele două profile pot fi așezate în cele două variante a) și b). Se cere să se determine sarcina capabilă să o suporte grinda pentru fiecare din cele două variante constructive, știind că  $\sigma_a=150$  MPa.. să se precizeze care din cele două variante este mai eficientă.

9. O grindă de lungime  $\ell=4$  m încărcată cu o sarcină uniform distribuită  $p=25$  kNm este suspendată cu ajutorul a două cabluri de o bara orizontală a unui utilaj de ridicare (fig. 7.29). Se cere să se determine distanța  $x$  de la capetele grinzii la punctele de legare a cablurilor, astfel încât tensiunea maximă din grinda confecționată din profil I20 să aibă o valoare minimă. Pentru această valoare a lui  $x$ , să se determine tensiunea maximă din grindă.

10. O grindă confecționată din profil I20 este suspendată prin intermediul unui cablu (fig. 7.30). Capetele cablului sunt prinse la o distanță  $a=0,207 \ell$  de capetele grinzii. Știind că  $p=25$  kNm și  $\ell=4$  m se cere să se determine tensiunile corespunzătoare punctelor A și B. Să se compare rezultatele obținute cu valoare tensiunilor maxime de la problema anterioară.

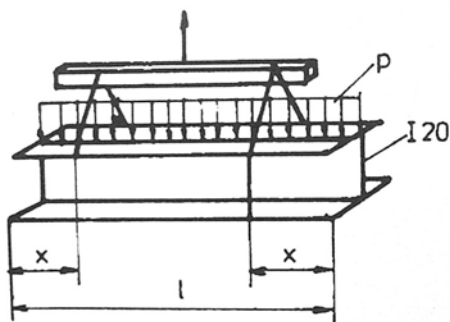


Fig. 7.29

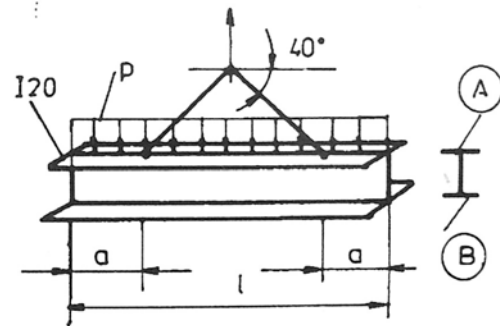


Fig. 7.30

11. O grindă confecționată din profil I10 este încastrată la un capăt și liberă la celălalt și solicitată de o sarcină conținută în planul vertical,  $P=3$  kN (fig. 7.31). Se cere să se determine valoarea maximă a tensiunii ce apare în această grindă.

12. Un stâlp realizat din profil I20 este solicitat de o frâă  $P=200$  kN, aplicată conform fig. 7.32. Se cere să se verifice acest stâlp, știind că  $\sigma_a=150$  MPa.

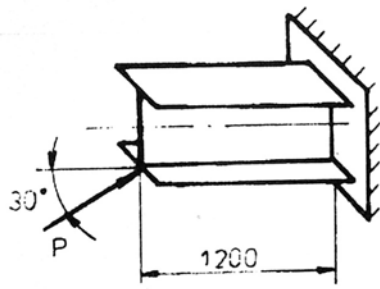


Fig. 7.31

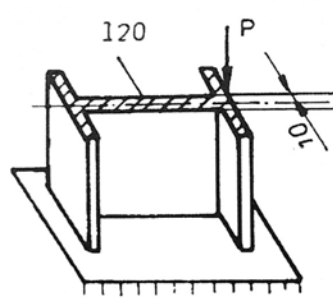


Fig. 7.32

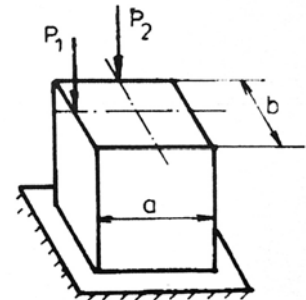


Fig. 7.33

13. Să se dimensioneze stâlpul de înălțime mică din fig. 7.33, știind că este confecționat din fontă cu  $\sigma_{at}=30$  MPa,  $\sigma_{ac}=100$  MPa. De asemenea se cunosc:  $P_1=30$  kN,  $P_2=15$  kN și  $a=1,5b$ .

14. Grinda prezentată în fig. 7.34 este confecționată din profil L 30x30x4 și este solocită de o sarcină P ce acționează în plan vertical. Știind că  $\sigma_a=150$  MPa și  $\tau_a=0,8\sigma_a$ . Se cere să se determine din condiția de rezistență valoarea sarcinii P atunci când aceasta este aplicată în punctul ① respectiv în punctul ②.

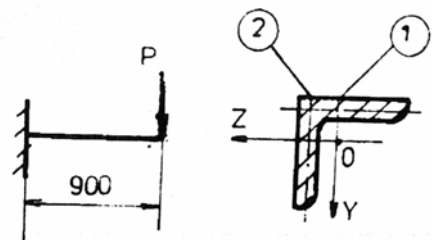


Fig. 7.34

15. Să se dimensioneze grinda din fig. 7.35 știind că este confecționată dintr-un material cu  $\sigma_a=180$  MPa, iar valoarea sarcinii P este de 15 kN.

16. Grinda din fig. 7.36 este confecționată din fontă ( $\sigma_{at}=30$  MPa,  $\sigma_{ac}=100$  MPa) și este solocită de o forță  $P=35$  kN. Să se dimensioneze grinda știind că  $a=500$  mm.

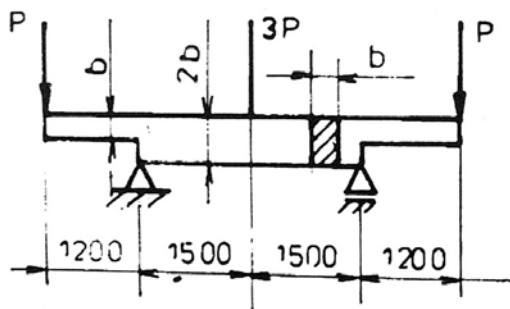


Fig. 7.35

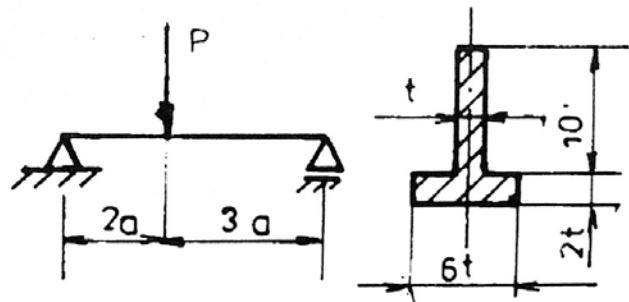


Fig. 7.36

17. Grinda din fig. 7.37 este confecționată din două profile L 60x60x10. Cunoscând faptul că materialul din care este confecționată grinda are  $\sigma_a=150$  MPa, iar sarcina care o solocită este  $p=10$  kN/m, se cere să se determine lungimea maximă a grinzii, astfel încât tensiunea din grindă să nu depășească valoarea admisibilă.

18. Grinda în consolă din fig. 7.38 este confecționată din fontă cu  $\sigma_{at}=30$  MPa,  $\sigma_{ac}=100$  MPa. Cunoscând lungimea grinzii  $L=1$  m, se cere să se determine sarcina capabilă să o suporte această grindă.

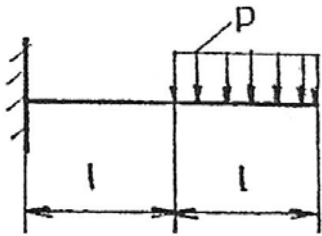


Fig. 7.37

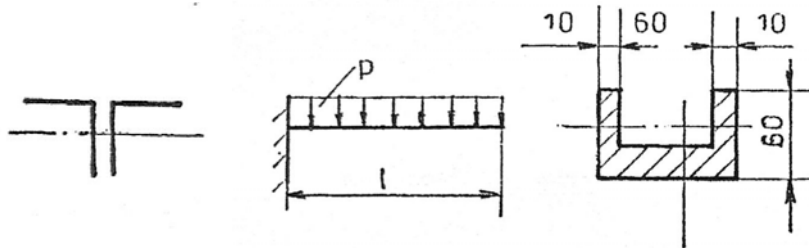


Fig. 7.38

19. O grindă în consolă de lungime  $L=4500$  mm este solicitată de o forță  $P=120$  kN. Grinda este confecționată din platbenzi ce sunt asamblate între ele cu nituri și corniere  $L 100 \times 100 \times 12$  ca în fig. 7.39. Se cere să se determine diametrul niturilor utilizate precum și pasul de nituire pentru platbenzile interioare și exterioare.

20. Să se dimensioneze sudura necesară realizării grinzii din figura 7.40, știind că  $P=140$  kN și  $\tau_{as}=95$  MPa. Cordonul de sudură trebuie să se realizeze în sudură discontinuă cu pasul  $e_1=650$  mm pe porțiunea 1-2 și pasul  $e_2=550$  mm pe porțiunea 2-3.

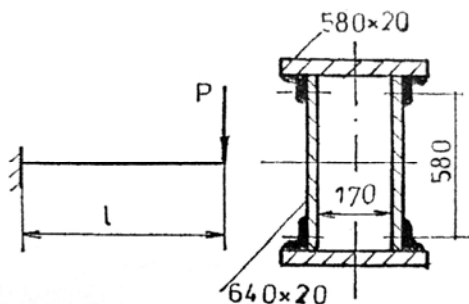


Fig. 7.39

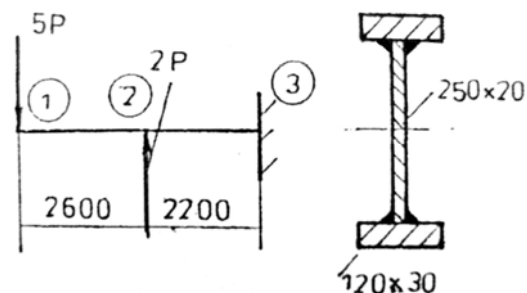


Fig. 7.40

21. Să se verifice pistonul din fig. 7.41 știind că în cilindru este o presiune  $p_i=25$  MPa. Se cunosc dimensiunile pieselor componente:  $D=30$  mm,  $d=14$  mm,  $d_i=6$  mm și  $h=12$  mm, precum și tensiunea admisibilă la strivire  $\tau_{as}=160$  MPa și tensiunea admisibilă la forfecare  $\tau_f=50$  MPa.

22. Unui tub de oțel având următoarele dimensiuni:  $D=200$  mm,  $h=10$  mm,  $L=500$  mm îi sunt sudate la capete două plăci rigide, conform fig. 7.42. La unul din capete tubul are muchia prelucrată la  $45^\circ$ . Se cere să se determine valoarea maximă a scăderii de temperatură la care poate fi supus ansamblul, astfel încât cordoanele de sudură să nu se rupă. Se cunosc rezistența la forfecare a sudurii  $\tau_{as}=80$  MPa și coeficientul de dilatare termică a oțelului  $\alpha_{OL}=12,5 \times 10^{-6}$  grad $^{-1}$ .

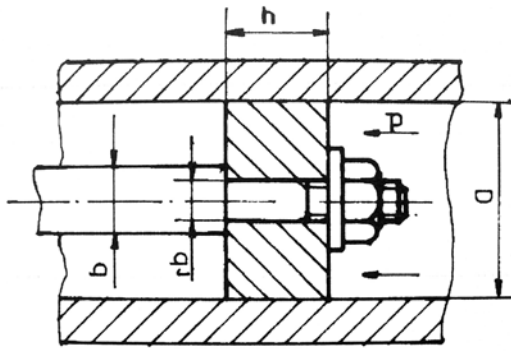


Fig. 7.41

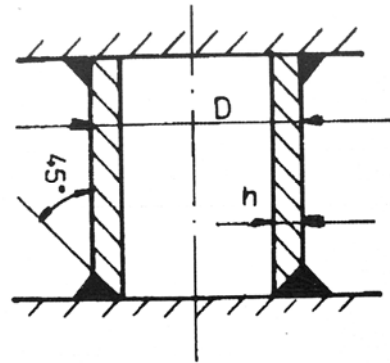


Fig. 7.42

23. Două paltbenzi având lăţimea  $h=30$  mm şi grosimea  $g=5$  mm sunt sudate cap la cap printr-un cordon de sudură în trei variante (fig. 7.43). Cunoscând tensiunile admisibile ale cordonului de sudură ( $\sigma_{as}=70$  MPa,  $\tau_{as}=55$  MPa) precum şi forţa care solicită cele două platbenzi ( $P=15$  kN), se cere să se determine tensiunile ce apar în cordonul de sudură în fiecare di cele trei cazuri. Să se precizeze care varianta este mai eficientă.

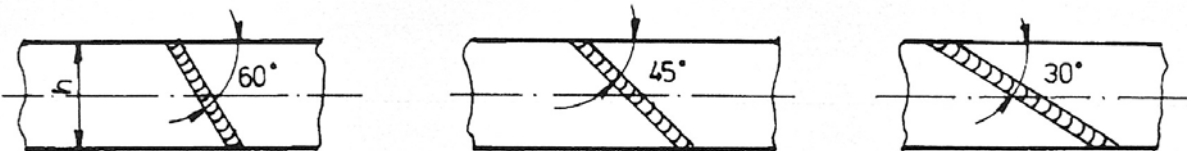


Fig. 7.43

24. Să se determine momentul de torsiune capabil să-l suporte ansamblul din fig. 7.44 ştiind că ştiftul ce leagă butucul roţii de arbore este confecţionat dintr-un material cu rezistenţa admisibilă la forfecare  $\tau_a=80$  MPa.

25. Discul de grosime  $t=10$  mm este sudat de un arbore cu diametrul  $D=80$  mm. Se cere să se determine momentul de frânare maxim ce poate fi transmis de la disc la arbore ştiind că sudura are rezistenţa admisibilă  $\tau_{as}=70$  MPa.

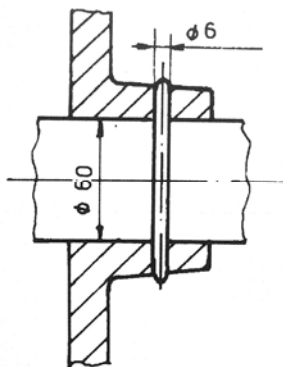


Fig. 7.44

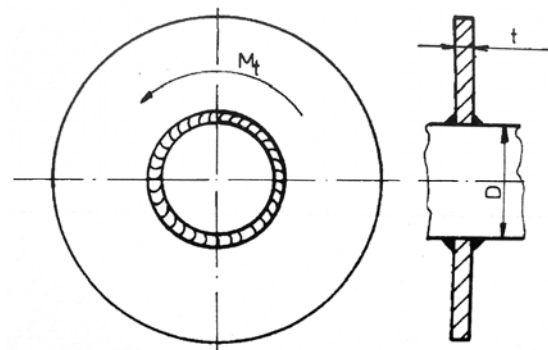


Fig. 7.45

26. Să se determine forța necesară ștanțării unui disc cu diametrul  $D=400$  mm realizat dintr-o tablă grosimea  $g=3$  mm, dacă se cunoaște că materialul tablei are  $\tau_r=320$  MPa.

## 8. SOLICITĂRI COMPUSE

### 8.1. Noțiuni introductive

Până acum s-au studiat solicitările simple ale (ER). În practica inginerescă sunt frecvente cazurile când sunt prezente simultan două sau mai multe solicitări simple. **Prezența simultană în secțiunea unui element de rezistență a două sau mai multor eforturi produce o solicitare compusă.**

În cazul solicitărilor compuse fiecare efort va produce în secțiune câte o tensiune, respectiv deformație, mărimi ce se pot calcula cu formulele învățate la solicitările simple. Se pune însă problema însumării acestor tensiuni respectiv deformații și stabilirii pentru aceste cazuri, a stării limită.

În decursul timpului, rezistența materialelor s-a străduit să dea un răspuns la această întrebare care să poată fi confirmată de practică. Acest răspuns nu este univoc și aceasta se va vedea în continuare.

### 8.2. Starea limită

La punctul 1.14, s-a arătat că ipotezele rezistenței materialelor sunt aproximări necesare pentru a putea cuprinde fenomenul fizic complex în relații matematice simple.

De multe ori se depășește limita de proporționalitate, uneori de elasticitate și chiar, în anumite cazuri, cea de curgere producându-se deformații permanente (neelastice respectiv nereversibile). Se ajunge astfel în situația când se spune despre ER că **nu rezistă. Faptul că nu rezistă nu implică nicidecum că ER se rupe ci depășirea unei stări limită.**

Se spune că **un ER a atins starea limită când acesta nu mai îndeplinește condițiile tehnice impuse de exploatarea normală, adică funcționarea acestuia devine imposibilă.**

Stările limită se pot clasifica în două grupe:

**I - stări limită de epuizare totală a capacității portante**, care se poate caracteriza prin:

- a) ruperea ER;
- b) atingerea limitei de curgere pe întreaga secțiune a ER;
- c) apariția fenomenului de instabilitate elastică (flambaj).

**II - stări limită de cedare funcțională**, care se caracterizează prin:

- a) apariția unor deformații elastice sau neelastice mai mari decât cele permise;
- b) apariția unor vibrații inadmisibile.

Buna funcționare a ER este compromisă de existența oricăreia din stările limită de mai sus. Ruperea se produce, în general la materialele fragile și este cea mai gravă. La materialele ductile se produc mai întâi, deformații plastice mari, ce se pot observa și se pot lua măsuri de evitarea lor.

La fel de periculoasă este și instabilitatea elastică a (ER). și a doua stare limită este inaccesibilă deoarece face imposibilă funcționarea.

### 8.3. Tensiunea echivalentă

Verdictul dat de ingineri că un ER **nu rezistă**, înseamnă că s-a depășit o anumită stare limită. În cele ce urmează prin stare limită se va considera atingerea unei caracteristici mecanice sau elastice a materialului până la care se consideră îndeplinite ipotezele de bază ale rezistenței materialelor, respectiv sunt aplicabile relațiile din teoria elasticității. Prin aceasta se restrânge noțiunea de stare limită la domeniul liniar - elastic.

Pentru a se determina starea limită se consideră cinci criterii:

- I.** - tensiunea normală maximă;
- II.** - alungirea specifică maximă;
- III.** - tensiunea tangențială maximă;
- IV.** - energia specifică totală de deformație maximă;
- V.** - energia specifică de schimbarea formei maximă.

Aceste cinci criterii s-au impus din două motive:

a) Prin încercări la întindere - compresiune se pot determina valorile caracteristicilor mecanice corespunzătoare stării limită ce nu trebuie depășite;

b) Între tensiunea limită determinată la întindere sau compresiune (ce nu trebuie depășită) și cele cinci criterii, prin care se determină starea limită, se pot stabili relații simple.

Dacă considerăm limita de proportionalitate drept stare limită, celelalte criterii de stare limită se pot scrie funcție de  $\sigma_p$  :



$$\sigma_{\max} \leq \sigma_p; \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E}; \tau_p = \frac{\sigma_p}{2}; U_{1p} = \frac{\sigma_p^2}{2E}; U_{1fp} = \frac{1+\nu}{3E} \cdot \sigma_p^2 \quad (8.1)$$

Starea spațială de tensiune dintr-un punct al ER poate fi echivalată, prin ipoteză, cu o stare monoaxială de tensiune. Echivalarea se face utilizând un criteriu din cele cinci. Acest lucru poate fi sintetizat prin figura de mai jos:

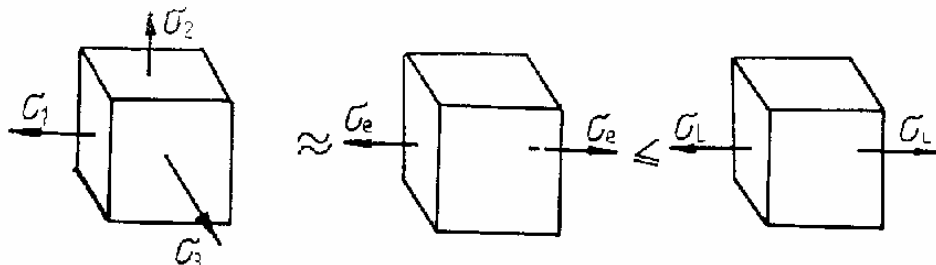


Fig. 8.1

Dacă se cunoaște starea limită la solicitarea de întindere sau compresiune se pot enunța cele cinci teorii de rezistență clasice prin care se stabilesc condițiile în care se atinge starea limită într-un punct al unui element de rezistență solicitat spațial. Verificarea stării limită se face determinând, pentru o stare de tensiune critică dintr-un punct, pe baza ipotezei de rezistență admisă, a unei tensiuni convenționale, numită **tensiune echivalentă**, care trebuie să satisfacă relația:

$$\sigma_{\text{ech}} \leq \sigma_L \quad (8.2)$$

Inegalitatea aceasta poate fi scrisă la limită și sub forma de egalitate:

$$\sigma_{\text{ech}} = \frac{\sigma_L}{c} \quad (8.3)$$

unde:  $c > 1$  este coeficientul de siguranță corespunzător.

Întrucât tensiunea echivalentă este funcție de starea de tensiune dintr-un punct al ER, iar starea limită depinde prin coeficientul de siguranță de starea reală de tensiune  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  rezultă că starea limită se poate exprima printr-o funcție:

$$S(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (8.4)$$

ce reprezintă o suprafață în sistemul de axe  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Astfel, starea de tensiune dintr-un punct al ER se poate reprezenta printr-un punct în sistemul  $(O\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Coordonatele punctului sunt, în acest caz tensiunile  $\sigma_1, \sigma_2$  și  $\sigma_3$  adică tensiunile principale din punctul respectiv al ER.

Dacă punctul  $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  se află în interiorul suprafeței (8.4), respectiv starea de tensiune este inferioară stării limită, se spune ca ER "rezistă", iar dacă este situat în exteriorul suprafeței (8.4) este o **stare de tensiune periculoasă (nu rezistă)**.

## 8.4. Teoriile clasice de rezistență

În funcție de cei cinci parametri aleși pentru atingerea stării limită avem cinci teorii (ipoteze) de rezistență.

### 8.4.1. Teoria tensiunii normale maxime

Formulată inițial de Galileo Galilei și reformulată de Rankine.

Se atinge starea limită într-un punct al unui ER atunci când tensiunea normală maximă din acel punct ajunge să fie egală cu tensiunea normală limită de la starea de întindere sau compresiune simplă a materialului ER respectiv.

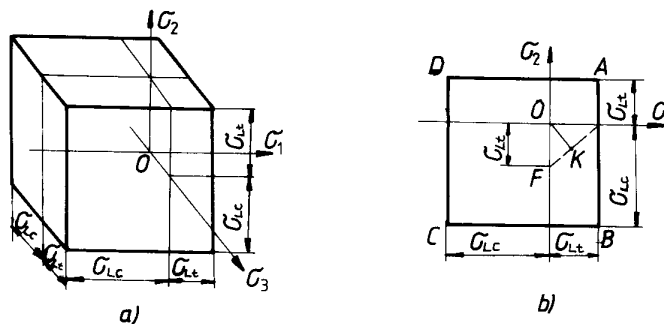


Fig. 8.2

Această teorie se poate exprima și prin relațiile:

$$\begin{aligned} -\sigma_{Lc} &\leq \sigma_1 \leq \sigma_{Lt}, \\ -\sigma_{Lc} &\leq \sigma_2 \leq \sigma_{Lt}, \\ -\sigma_{Lc} &\leq \sigma_3 \leq \sigma_{Lt}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

care se pot reprezenta printr-un cub pentru starea spațială (fig.8.2,a) sau un pătrat pentru starea plană de tensiune (fig.8.2,b).

Dacă  $\sigma_{Lt} \neq \sigma_{Lc}$ , originea sistemului ale axe nu se află în centrul cubului (respectiv al pătratului).

Această teorie nu corespunde complet realității deoarece pentru starea de compresiune tridimensională ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_L$ ), pentru care corpul nu poate fi distrus, trebuie să rezulte  $\sigma_{Lc} = \infty$ .

De asemenea, în cazul forfecării, pentru care tensiunea limită este  $\tau_L = \sigma_L / 2$ , ce corespunde punctului K, din interiorul pătratului și nu punctului B, care este limita conform acestei teorii.

Datorită acestor neconcordanțe, teoria tensiunilor normale maxime poate fi folosită, cu precauție, numai pentru stări de tensiune la care ruperea se face prin smulgere (este o teorie de smulgere).

Pentru starea de tensiune cea mai defavorabilă dintr-un punct al ER, tensiunea echivalentă, conform teoriei tensiunii normale maxime, este:

$$\sigma_{ech} = \max\{|\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3|\} \leq \sigma_L. \quad (8.6)$$

### 8.4.2. Teoria alungirii specifice maxime

Această teorie a fost emisă de Barré de Saint-Venant. Conform acestei teorii se consideră că distrugerea elementului de rezistență este cauzată de lungirile specifice maxime. **Într-un punct al unui ER se atinge starea limită când alungirea specifică maximă  $\varepsilon_{max}$ , din acel punct, ajunge să fie egală cu valoarea alungirii specifice limită de la întindere sau compresiune simplă.**

$$\varepsilon_{max} \leq \varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E},$$

sau exprimând prin tensiuni:

$$\begin{aligned} -\sigma_{LC} &\leq \sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{Lt}, \\ -\sigma_{LC} &\leq \sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1) \leq \sigma_{Lt}, \\ -\sigma_{LC} &\leq \sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_{Lt}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

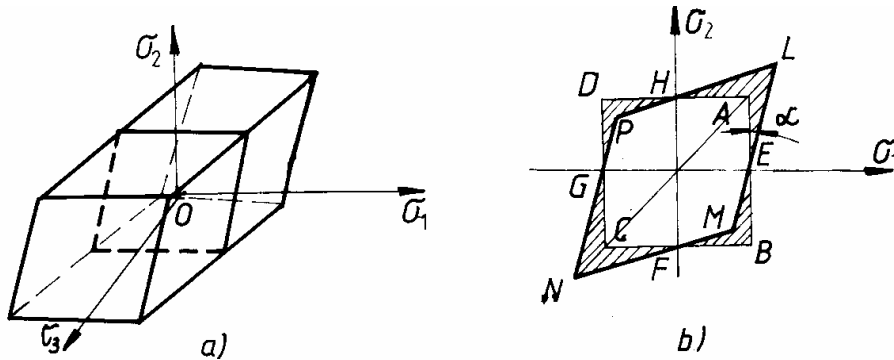


Fig. 8.3

Relațiile (8.7) exprimă suprafața limită care este în acest caz, un paralelipiped înclinat (fig.8.3,a). Pentru starea plană de tensiune se obține rombul din figura (8.3,b), ce rezultă din secționarea paralelipipedului cu planul  $\sigma_3 = 0$ .

Unghiul  $\alpha$ , cu care sunt înclinate laturile rombului, de la teoria a II-a față de pătratul ce reprezintă prima teorie este dat de relația:  $\arctg(\nu)$

Această teorie are aproape aceleași deficiențe ca și prima. De aceea se poate aplica, cu bune rezultate la materiale casante, ca o ipoteză de smulgere.

Tensiunea echivalentă, în acest caz pentru starea spațială se exprimă prin relația:

$$\sigma_{\text{ech}} = \max \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)| \\ |\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)| \end{array} \right\} \leq \sigma_L \quad (8.8)$$

### 8.4.3. Teoria tensiunii tangențiale maxime

A fost formulată de Coulomb și conform acestei teorii starea limită apare prin alunecări în planul în care acționează tensiunea tangențială maximă. Sub forma actuală a fost reformulată de Tresca. Conform acestei teorii **starea limită într-un punct al unui ER se atinge atunci când tensiunea tangențială maximă ajunge să fie egală cu valoarea tensiunii tangențiale ( $\tau_L$ ) de la solicitarea de întindere sau compresiune simplă.**

Această teorie se poate exprima prin:

$$\tau_{\text{max}} \leq \frac{\sigma_L}{2},$$

condiție ce este îndeplinită de:

$$-\tau_L \leq \tau_1 \leq \tau_L,$$

$$-\tau_L \leq \tau_2 \leq \tau_L,$$

$$-\tau_L \leq \tau_3 \leq \tau_L.$$

Ținând seama că

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \text{și} \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

se obține:

$$-\sigma_L \leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_L,$$

$$-\sigma_L \leq \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_L,$$

$$-\sigma_L \leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_L.$$

(8.9)

Relațiile (8.9) reprezintă, pentru semnul egal între tensiuni, o prismă hexagonală regulată deschisă la capete. Axa prisme este trisectoarea  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Suprafața rezultă deschisă la ambele capete deoarece atât pentru compresiune triaxială  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_L$  cât și pentru întindere triaxială  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_L$ , tensiunile tangențiale sunt nule (fig.8.4.a) și nu se produc alunecări.

Conform acestei ipoteze, în aceste cazuri, nu se atinge starea limită și ER nu este distrus. Concluzia este adevărată numai pentru compresiune uniformă triaxială, dar nu corespunde cu realitatea pentru întinderea uniformă triaxială.

Starea plană, ce este o secțiune cu planul  $\sigma_3 = 0$  (fig. 8.4) este reprezentată printr-un hexagon neregulat AEFCGH (fig.8.4,b) și corespunde, pentru  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0$  cu teoria I și diferă de aceasta pentru  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$ . În cazul forfecării pure, când  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{\max}$ , este reprezentată de punctul K de coordonate  $\frac{\sigma_L}{2}$  și  $-\frac{\sigma_L}{2}$ .

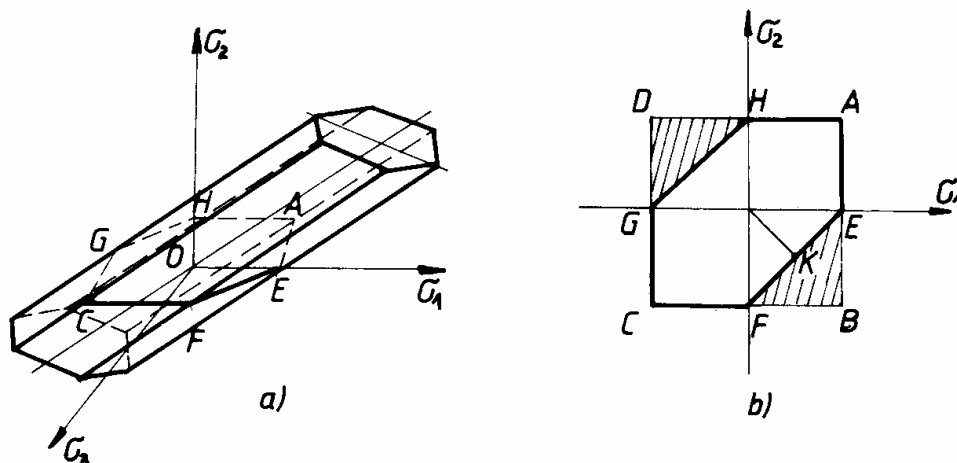


Fig. 8.4

Această teorie a fost verificată experimental și s-a constatat că ea corespunde cu realitatea cu excepția stării de tensiune apropiată de întindere triaxială, când datorită faptului ca tensiunile tangențiale sunt mici, nu se produc alunecări.

Nici teoria a - III-a nu este perfectă pentru că:

- a) nu ține seama de influența tensiunii normale în planul de alunecare;
- b) nu ține seama de rezistența diferită a materialelor la întindere și compresiune;
- c) neglijează efectul tensiunii intermediare (în calcul se iau numai două tensiuni principale).

Condiția de rezistență pentru această teorie, se exprimă prin relația:

$$\sigma_{ech} = \max\{(\sigma_1 - \sigma_2); (\sigma_1 - \sigma_3); (\sigma_2 - \sigma_3)\} \leq \sigma_L.$$

Dacă se ține seama că  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , condiția de rezistență devine:

$$\sigma_{ech} = |\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_L, \tag{8.10}$$

și deci este independentă de valoarea tensiunii normale intermediare  $\sigma_2$ .

### 8.4.4. Teoria energiei totale de deformare

Aceasta teorie a fost formulată de Haigh și se enunță astfel: **într-un punct al unui ER se atinge starea limită atunci când energia de deformare specifică ajunge să fie egală cu valoarea energiei de deformare specifică corespunzătoare solicitării de întindere sau compresiune simplă**, adică:

$$U_1 \leq U_{1L}$$

Exprimând aceste energii de deformare, în funcție de tensiuni, se obține inegalitatea:

$$\frac{1}{2E} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)) \leq \frac{\sigma_L^2}{2E},$$

sau simplificând prin (2E) rezultă:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \leq \sigma_L^2, \quad (8.11)$$

relație ce exprimă un elipsoid.

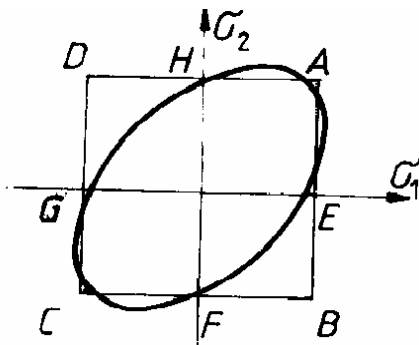


Fig. 8.5

Pentru starea plană de tensiune se reprezintă printr-o elipsă ce trece prin punctele EFGH (fig.8.5). Această teorie de rezistență este de smulgere. Este utilizată numai pentru stări de tensiune apropiate de starea triaxială de întindere:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} > 0$$

Tensiunea echivalentă, în acest caz, se exprimă cu relația:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)} \leq \sigma_L \quad (8.12)$$

### 8.4.5. Teoria energiei specifice de variație a formei

A fost formulată de către Huber-Hencky-Mises și ia în considerare numai energia specifică de variație a formei.

Conform acestei teorii, **într-un punct al unui ER se atinge starea limită când energia de deformare specifică de schimbare a formei, din acel punct, ajunge să fie egală cu energia specifică de schimbare a formei corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere sau compresiune simplă.**

$$U_{1f} \leq U_{1fL}$$

sau, exprimând în funcție de tensiuni se obține:

$$\frac{1+\nu}{6E} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{1+\nu}{3E} \cdot \sigma_L^2,$$

iar după simplificări se obține:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1 \leq \sigma_L^2. \quad (8.13)$$

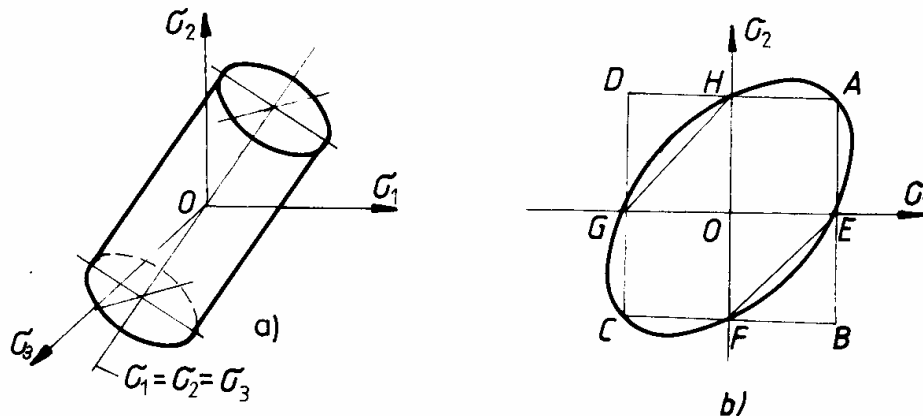


Fig. 8.6

Relația (8.13) reprezintă un cilindru deschis la ambele capete, având ca axă bisectoarea  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (fig.8.6,a).

Secțiunea normală la axa cilindrului este un cerc, iar secțiunea făcută cu planul  $\sigma_3 = 0$ , corespunzătoare stării plane de tensiune, este o elipsă circumscrisă hexagonului neregulat de la teoria a III-a, fig. 8.6b.

Tensiunea echivalentă în acest caz se exprimă cu formula:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} \leq \sigma_L. \quad (8.14)$$

Această teorie este apropiată de realitate cu excepția stării triaxiale uniforme de întindere. Este superioară teoriei a III-a deoarece ține seama și de tensiunea intermediară.

## 8.5. Particularizări ale teoriilor de rezistență

### 8.5.1. Starea plană de tensiune

Înlocuind în relațiile de mai sus  $\sigma_3 = 0$  rezultă starea plană de tensiune caracterizată numai prin tensiunile principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$ .

Relațiile pentru tensiunile echivalente devin:

$$\begin{aligned}
\text{I)} \sigma_{\text{ech}} &= \max\{|\sigma_1|; |\sigma_2|\} \leq \sigma_L, \\
\text{II)} \sigma_{\text{ech}} &= \max\{|\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2|; |\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1|\} \leq \sigma_L, \\
\text{III)} \sigma_{\text{ech}} &= \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_L, \\
\text{IV)} \sigma_{\text{ech}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq \sigma_L, \\
\text{V)} \sigma_{\text{ech}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq \sigma_L.
\end{aligned}
\tag{8.15}$$

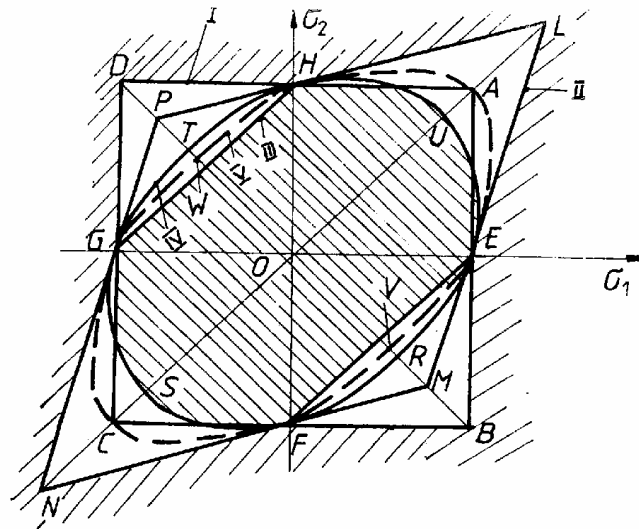


Fig. 8.7

În figura 8.7 s-au reprezentat prin aceste relații:

- pătratul ABCD - conform teoriei I;
- rombul LMNP - conform teoriei a - II-a;
- hexagonul neregulat AEFCGHA - conform teoriei a - III -a;
- elipsa ERFSGTHUE - conform teoriei a - IV -a;
- elipsa EVFCGWHAE - conform teoriei a -V-a.

Din această figură se observă că în punctele de pe axe, adică la întindere sau compresiune simplă toate ipotezele de rezistență coincid. Suprafața hașurată interioară reprezintă stările plane  $\sigma_1, \sigma_2$  care nu depășesc starea limită după toate ipotezele, iar suprafața hașurată exterioară reprezintă stările de tensiune care, după toate ipotezele, conduc la depășirea stării limită. Suprafața nehașurată reprezintă zona în dispută între diferitele teorii de rezistență.

### 8.5.2. Aplicarea teoriilor de rezistență la bare

În cazul particular al barelor, în secțiunile cărora pot exista numai tensiuni normale  $\sigma = \sigma_x$  și tangențiale  $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$ , tensiunile principale se obțin cu relația:



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2},$$

care înlocuite în relațiile (8.17), pentru  $\nu = 0,3$  dau formulele:

$$\begin{aligned} \text{I)} \sigma_{\text{ech}} &= 0,5 \cdot (|\sigma| + \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}) \leq \sigma_L, \\ \text{II)} \sigma_{\text{ech}} &= \left( \frac{1-\nu}{2} \cdot |\sigma| + \frac{1+\nu}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{\text{ech}} &= 0,35 \cdot |\sigma| + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \sigma_L, \\ \text{III)} \sigma_{\text{ech}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \sigma_L, \\ \text{IV)} \sigma_{\text{ech}} &= \sqrt{\sigma^2 + 2(1+\nu) \cdot \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 2,6 \cdot \tau^2} \leq \sigma_L, \\ \text{V)} \sigma_{\text{ech}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \sigma_L. \end{aligned} \tag{8.16}$$

### 8.5.3. Aplicarea teoriilor de rezistență la starea de forfecare pură

Pentru starea de forfecare pură, când  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$  înlocuind în relațiile (8.17) și luând  $\nu = 0,3$  acestea devin:

$$\begin{aligned} \text{I. } \sigma_{\text{ech}} &= \tau \leq \tau_L, \text{ deci } \tau_L = \sigma_L, \\ \text{II. } \sigma_{\text{ech}} &= (1+\nu) \cdot \tau_L \text{ deci } \tau_L = \frac{\sigma_L}{1+\nu} = 0,7692 \cdot \sigma_L, \\ \text{III. } \sigma_{\text{ech}} &= 2 \cdot \tau \leq \sigma_L \text{ deci } \tau_L = 0,5 \cdot \sigma_L, \\ \text{IV. } \sigma_{\text{ech}} &= \tau \cdot \sqrt{2(1+\nu)} \leq \sigma_L \text{ deci } \tau_L = \frac{\sigma_L}{\sqrt{2(1+\nu)}} = 0,62 \cdot \sigma_L, \\ \text{V. } \sigma_{\text{ech}} &= \sqrt{3} \cdot \tau_L \text{ deci } \tau_L = \frac{\sigma_L}{\sqrt{3}} = 0,5774 \cdot \sigma_L. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Admițând că legea lui Hooke poate fi extinsă până la limita de curgere, se poate exprima limita de curgere la torsiune în funcție de limita de curgere la tracțiune sau compresiune, conform teoriilor de rezistență, astfel:

$$\begin{aligned} \text{I. } \tau_c &= \sigma_c, \\ \text{II. } \tau_c &= 0,7692 \cdot \sigma_c, \\ \text{III. } \tau_c &= 0,5 \cdot \sigma_c, \\ \text{IV. } \tau_c &= 0,62 \cdot \sigma_c, \\ \text{V. } \sigma_c &= 0,5774 \cdot \sigma_c. \end{aligned} \tag{8.18}$$

## 8.6 Criterii de alegere a teoriilor de rezistență

În general pentru materialele tenace se folosesc teoriile de rupere prin lunecare, adică teoria **V** sau **III**, iar pentru materialele casante se utilizează teoriile de rupere prin smulgere, respectiv teoria **II** sau teoria **I**. Ordinea indicată a teoriilor este de preferat.

Experimental s-a constatat că modul de rupere depinde în mare măsură de starea de tensiune la care este supus ER. Din aceste considerente se recomandă alegerea teoriei de rezistență în funcție de semnul tensiunii medii:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \text{ și anume:}$$

a) pentru  $\sigma_m < 0$ , se alege o teorie de rupere prin lunecare, adică teoria **V** sau teoria **III**;

b) pentru  $\sigma_m > 0$ , se alege o teorie de rupere prin smulgere, adică teoria **II** sau teoria **I**.

De asemenea, pentru alegerea teoriilor de rezistență se poate utiliza **criteriul lui Davidenko - Fridmann**. Conform acestui criteriu se definește **starea mecanică de solicitare** prin raportul:

$$m = \frac{\sigma_{ech}(III)}{\sigma_{ech}(II)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cdot [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]} \quad (8.19)$$

raport ce reprezintă panta unei drepte ce trece prin origine într-un sistem de axe **O $\sigma$** . Diagrama din figura 8.8, se obține pentru orice material pentru care s-a determinat experimental  $\sigma_L$  și  $\tau_L$ .

Dreptele de pantă **m** prezentate în figură, pentru diferite valori ale stării mecanice de solicitare, sunt:

- dreapta-1, cu panta **m=0**, ce se obține pentru  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ , reprezintă întindere uniformă după trei axe;

- dreapta-2, cu panta **0 < m < 0,5** o solicitare dată de  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$  (întindere după 3 direcții);

- dreapta-3, cu panta **m=0,5** o solicitare de întindere simplă  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ;

- dreapta-4, cu panta **m=0,7692** o solicitare de forfecare pură:  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = 0$ .

- dreapta-5, cu panta **m=1,67**, o solicitare de compresiune simplă,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$ .

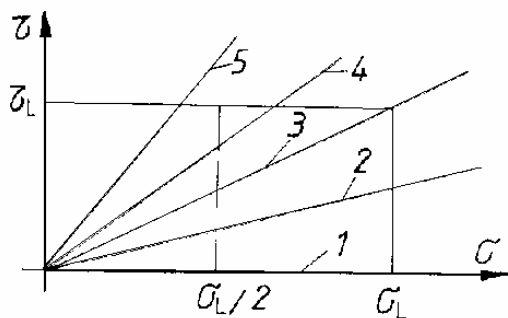


Fig. 8.8

Pentru a alege teoria de rezistență ce trebuie utilizată, după acest criteriu, se calculează panta dreptei cu relația (8.19) și se trasează dreapta respectivă pe fig. 8.8, apoi se procedează astfel:

- dacă dreapta trasată taie întâi verticala  $\sigma = \sigma_L$ , înseamnă că ruperea se va produce prin smulgere, se impune să se aleagă o teorie de smulgere (teoria II sau I);
- dacă dreapta trasată taie întâi orizontală  $\tau = \tau_L$ , atunci ruperea se va produce prin lunecare și se impune să se aleaga o teorie de rupere prin lunecare (teoria V sau III).

## 8.7 Calculul de rezistență al barelor supuse la solicitări compuse

Prin solicitare compusă se înțelege acțiunea simultană asupra barei a două sau mai multe eforturi, cazuri ce se întâlnesc frecvent în aplicațiile ingineresti. Dar fiecare efort produce câte o tensiune, unele tensiuni normale, altele tangențiale. Datorită acestui fapt, solicitările compuse se pot studia având în vedere tensiunile ce le produc.

După tipul de tensiune produsă, eforturile ce produc solicitarea compusă se grupează în următoarele trei grupe:

- N și M ( $M_y$  și  $M_z$ ) ce produc tensiuni normale;
- T ( $T_y$  și  $T_z$ ) și  $M_t$  ce produc tensiuni tangențiale;
- N și T sau N și  $M_t$ , M și  $M_t$ , M și  $M_t$ , N, M,  $M_t$ , ce produc atât tensiuni normale cât și tangențiale.

În cazurile a și b când tensiunile au aceeași direcție acestea se însumează algebric, iar când au direcții diferite se însumează geometric.

În cazul c, cele două tipuri de tensiuni  $\sigma$  și  $\tau$  nu se însumează algebric și nici geometric ci numai folosind una din teoriile de rezistență (cea corespunzătoare).

După forma secțiunii grupa c de solicitare compusă se subdivizează, pentru analiză în două subgrupe:

- bare de secțiune circulară sau inelară și
- bare de secțiune oarecare.

### 8.7.1. Întindere sau compresiune excentrică

Solicitarea de întindere sau compresiune excentrică se produce în barele încărcate cu o forță paralelă cu axa bazei (cazul a).

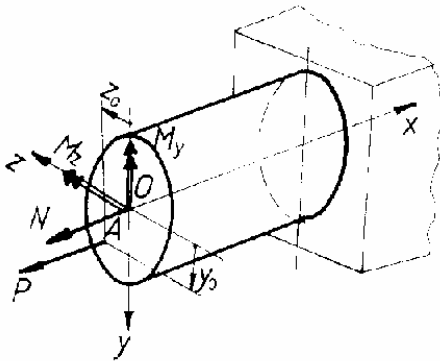


Fig. 8.9

Considerăm o bară, încărcată în punctul A, de coordonate  $y_0$  și  $z_0$  cu forța P, paralelă cu axa barei (fig.8.9). Reducând forța P în centrul de greutate al secțiunii se obțin eforturile:

- forța axială,  $N = P$ ,

-momentul încovoietor, având componentele:

$$M_z = P \cdot y_0 \quad \text{și} \quad M_y = -P \cdot z_0,$$

unde:  $y_0$  și  $z_0$  sunt coordonatele punctului de aplicare al forței P.

Aceste eforturi produc, într-un punct oarecare, de coordonate y și z a secțiunii, tensiunile:

$$\sigma_t = \frac{N}{A}, \quad \sigma'_i = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad \text{și} \quad \sigma''_i = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z.$$

Aceste tensiuni având aceeași direcție, paralelă cu axa barei se vor însuma algebric:

$$\sigma = \sigma_t + \sigma' + \sigma'' = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z.$$

Înlocuind valorile eforturilor, tensiunea totală este:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{P \cdot y_0 \cdot y}{I_z} + \frac{P \cdot z_0 \cdot z}{I_y} = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{A \cdot y_0}{I_z} \cdot y + \frac{A \cdot z_0}{I_y} \cdot z\right).$$

Ținând seama că  $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$  și  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ , reprezintă razele de inerție, tensiunea

într-un punct al secțiunii se obține din relația:

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{y \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_0}{i_y^2}\right). \quad (8.20)$$

Axa neutră ce corespunde punctelor pentru care  $\sigma = 0$ , se obține prin anularea parantezei, adică din ecuația:

$$1 + \frac{y \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_0}{i_y^2} = 0, \quad (8.21)$$

ce reprezintă ecuația unei drepte având tăieturile pe axele Oy și Oz:

$$y_M = -\frac{i_z^2}{y_0}, \quad z_M = 0, \quad y_N = 0, \quad z_N = -\frac{i_z^2}{z_0}. \quad (8.22)$$

Din relațiile (8.24) rezultă că tăieturile axei neutre pe axele de inerție principale au semne contrare coordonatelor punctului de aplicație al forței. Înseamnă că axa neutră va trece prin cadranul opus cadranelui în care se află punctul de aplicație al forței.

**Aplicația 8.1.** Să se determine sarcina capabilă să o suporte stâlpul din figura 8.10 confecționat dintr-un profil I30, din OL 37 cu  $\sigma_a = 150$  MPa. Să se traseze diagrama de variație a tensiunilor pe secțiune.

**Rezolvare:** Mărimile geometrice pentru profilul I30 (vezi anexa 9) sunt  $A = 69,1 \text{ cm}^2$ ,  $i_z = 11,9$  cm,  $i_y = 2,56$  cm, și  $b = 125$  mm.

Coordonatele punctului de aplicare a forței, față de sistemul de axe ales sunt  $y_0 = -140$  mm și  $z_0 = -60$  mm. Punctul cel mai sollicitat (tensiune maximă în valoare absolută), este punctul 1 (cel mai depărtat punct din cadranul forței), de coordonate  $y_1 = -150$  mm și

$$z_1 = -62,5 \text{ mm}.$$

Din relația (8.22) scrisă pentru punctul 1 se obține:

$$P_{\text{cap}} = \frac{\sigma_a \cdot A}{1 + \frac{y_1 \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_1 \cdot z_0}{i_y^2}} = \frac{150 \cdot 69,1 \cdot 10^2 \cdot 10^3}{1 + \frac{150 \cdot 140}{119^2} + \frac{62,5 \cdot 60}{25,6}} = 126,3 \text{ kN}$$

Adopt:  $P_{\text{cap}} = 125$  kN.

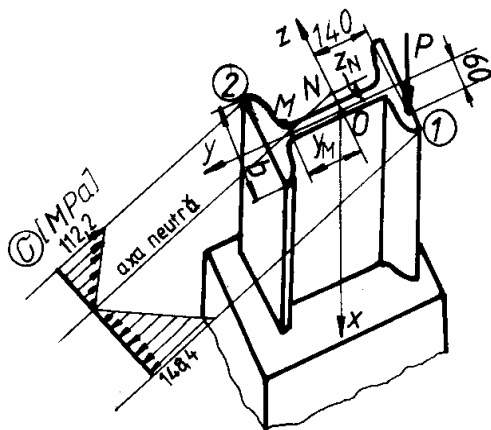


Fig. 8.10

Intersecția axei neutre cu axele de coordonate sunt:

$$y_M = -\frac{i_z^2}{y_0} = -\frac{119^2}{-150} = 94,4 \text{ mm}, \quad z_M = 0;$$

$$z_N = -\frac{i_y^2}{z_0} = -\frac{25,6^2}{-60} = 10,9 \text{ mm}, \quad y_N = 0.$$

Tensiunile extreme pentru punctele 1 și 2 rezultă:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_1 \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_1 \cdot z_0}{i_y^2}\right) = \frac{-125 \cdot 10^3}{69,1 \cdot 10^2} \cdot \left(1 + \frac{150 \cdot 140}{119^2} + \frac{62,5 \cdot 60}{25,6^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = -148,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{y_2 \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_2 \cdot z_0}{i_y^2}\right) = \frac{-125 \cdot 10^3}{69,1 \cdot 10^2} \cdot \left(1 - \frac{150 \cdot 140}{119^2} - \frac{62,5 \cdot 60}{25,6^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = 112,2 \text{ MPa}$$

Poziția axei neutre și variația tensiunilor este dată în fig. 8.10.

### 8.7.2. Calculul de rezistență al arborilor de secțiune circulară și inelară solicitați la încovoiere și răsucire

Dintre ER solicitate compus în care se produc atât tensiuni normale cât și tangențiale o frecvență deosebit de mare în aplicațiile ingineresti o au arborii, osile motoare, șuruburile, etc.

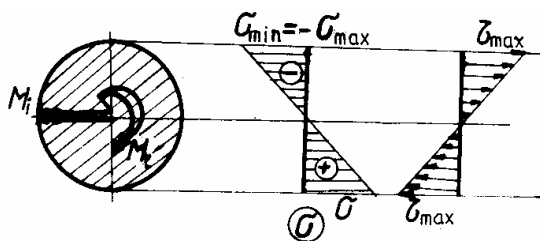


Fig. 8.11

Arborii sunt organe de mașini care transmit prin intermediul roților dințate, a roților de curea sau a cuplajelor, momente de torsiune și sunt solicitați la încovoiere simplă. Calculul de rezistență al arborilor se face ținând seama numai de momentele de încovoiere și de torsiune, neglijând efectul forței tăietoare. Datorită acestor momente tensiunile normale și tangențiale maxime ce se produc în secțiunile transversale periculoase se determină în relațiile:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_i}{W_z} \quad \text{și} \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}.$$

Având în vedere că la o secțiune circulară sau inelară,  $W_z = 2W_p$ , tensiunile maxime, exprimate numai în funcție de modulul de rezistență axial, sunt:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_i}{W_z} \quad \text{și} \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{2W_z}.$$

Deoarece, atât la încovoiere cât și la torsiune aceste tensiuni sunt maxime în cele mai depărtate puncte față de axa neutră (Oz în fig. 8.11), pentru aceste puncte se calculează tensiunea echivalentă. Utilizând teoria III de rezistență (III, 8.16) se obține:

$$\sigma_{\text{ech}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sqrt{\frac{M_i^2}{W_z^2} + 4 \frac{M_t^2}{(2W_z)^2}} = \sqrt{\frac{M_i^2 + M_t^2}{W_z^2}} = \frac{M_{\text{ech}}}{W_z}.$$

În care, în cazul teoriei III, s-a notat cu:

$$M_{ech} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2},$$

mărime ce se numește **moment încovoietor echivalent**.

Momentul echivalent este un moment de încovoiere convențional, calculat cu ajutorul unei teorii de rezistență prin care se echivalează o solicitare compusă de încovoiere și torsiune, numai pentru arborii de secțiune circulară sau inelară, cu o solicitare de încovoiere.

Procedând în mod analog cu toate relațiile (8.16) rezultă următoarele expresii pentru momentul încovoietor echivalent:

$$\begin{aligned} \text{I. } M_{ech} &= 0,5 \cdot (M_i + \sqrt{M_i^2 + M_t^2}), \\ \text{II. } M_{ech} &= 0,35 \cdot M_i + 0,65 \cdot \sqrt{M_i^2 + M_t^2}, \\ \text{III. } M_{ech} &= \sqrt{M_i^2 + M_t^2}, \\ \text{IV. } M_{ech} &= \sqrt{M_i^2 + 0,65 \cdot M_t^2}, \\ \text{V. } M_{ech} &= \sqrt{M_i^2 + 0,75 \cdot M_t^2}. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Utilizând relațiile (8.23) se obține valoarea momentului încovoietor echivalent. Acesta se utilizează în calculul de rezistență ca și cum arborele ar fi solicitat numai la încovoiere de către un moment având valoarea lui  $M_{ech}$ .

Astfel, calculul de rezistență la arbori de secțiune circulară și inelară solicitați de  $M_i$  și  $M_t$  va fi analog cu cel prezentat la încovoiere și anume:

**a) problemele de verificare:**

$$\sigma_{ech} = \frac{M_{ech}}{W_z} \leq \sigma_a, \tag{8.24}$$

**b) problemele de capacitate de încărcare:**

$$M_{echcap} = \sigma_a \cdot W_z, \tag{8.25}$$

**c) problemele de dimensionare:**

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32M_{ech}}{\pi \cdot \sigma_a}} \text{ sau } D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32M_{ech}}{(1-k^4) \cdot \pi \cdot \sigma_a}}. \tag{8.26}$$

În cazul arborilor, tensiunea admisibilă se ia mai mică și anume  $\sigma_a = \sigma_{a III}$ , deoarece s-a neglijat efectul forței taietoare și faptul că arborele este solicitat și la oboseală.

**Aplicația 8.2.** Să se dimensioneze arborele din figura (8.12,a), confecționat din OL 50 cu  $\sigma_a = 80$  MPa știind că are secțiune inelară cu  $d = 0,8 D$ .

**Rezolvare:** Forțele  $P$  și  $Q$  de la periferia celor două roți se reduc în centrele roților respective, rezultând schema de încărcare din figura (8.12,b), prin care arborele este solicitat de forțele  $P$  și  $Q$  la încovoiere (se neglijează solicitarea de forfecare) și de momentele  $M_t, M_{t3} = P \cdot R_1$  și  $M_{t4} = Q \cdot R_2$  la torsiune.

Din ecuația de echilibru  $M_{tx} = 0$  se determină sarcina  $Q$ :

$$Q = \frac{P \cdot R_1 - M_t}{R_2} = \frac{20 \cdot 0,2 - 2,4}{0,4} = 4 \text{ kN}.$$

Momentele de torsiune sunt:

$$M_{t1-3} = -M_t = -2,4 \text{ kNm},$$

$$M_{t3-4} = -M_t + P \cdot R_1 = -2,4 + 20 \cdot 0,2 = 1,6 \text{ kNm},$$

$$M_{t4-2} = 0,$$

iar diagrama momentelor de torsiune este reprezentată în figura (8.12,c).

Reacțiunile din lagăre sunt:

$$V_1 = \frac{20 \cdot 1 + 4 \cdot 0,4}{1,2} = 18 \text{ kN}$$

și

$$V_2 = \frac{20 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,8}{1,2} = 6 \text{ kN},$$

iar momentele de încovoiere:

$$M_3 = V_1 \cdot 0,2 = 18 \cdot 0,2 = 3,6 \text{ kNm}$$

și

$$M_4 = V_2 \cdot 0,4 = 6 \cdot 0,4 = 2,4 \text{ kNm}.$$

Diagrama momentelor de încovoiere este reprezentată în figura (8.12,d).

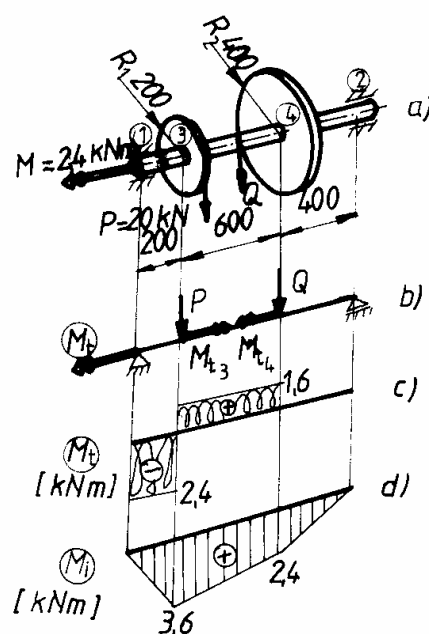


Fig. 8.12

Secțiunea periculoasă, unde se face calculul de rezistență este secțiunea (3) unde  $M_i$  și  $M_t$  au valori maxime (în valoare absolută) și pentru această secțiune momentul echivalent este:

$$M_{echV} = \sqrt{M_i^2 + 0,75 \cdot M_t^2} = \sqrt{3,6^2 + 0,75 \cdot 2,4^2} = 4,157 \text{ kNm}.$$

Diametrul necesar determinat de relația 8.26, pentru secțiune inelară este:

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32M_{ech}}{\pi \cdot \sigma_a \cdot (1 - k^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4,157 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 96,42 \text{ mm}.$$

Se adoptă:  $D = 95 \text{ mm}$  și  $d = 76 \text{ mm}$ .



Deoarece s-a adoptat o valoare inferioară celei calculate se va face obligatoriu verificarea pentru a se vedea dacă nu s-a depășit cu mai mult de  $5\% \cdot \sigma_a$ .

$$\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot M_{\text{ech}}}{\pi \cdot D_{\text{efc}}^3 \cdot (1 - k^4)} = \frac{32 \cdot 4,157 \cdot 10^6}{\pi \cdot 95^3 \cdot (1 - 0,8^4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = 83,65 \text{MPa} < 1,05 \cdot \sigma_a = 84 \text{MPa}$$

### 8.7.3. Calculul de rezistență al barelor de secțiune oarecare supuse unor solicitări compuse

Eforturile ce produc tensiuni normale într-o secțiune a barei sunt forța axială și momentul încovoietor. Tensiunile normale au direcția axei astfel că se pot însuma algebric în orice punct al secțiunii. Valorile acestor tensiuni într-un punct oarecare al secțiunii pot fi calculate cu una din relațiile:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y,$$

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z, \quad (8.27)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z.$$

Tensiunile normale maxime, ce se produc în secțiunea periculoasă și în punctele cele mai îndepărtate de axa neutră se calculează cu una din relațiile:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}, \quad (8.28)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}.$$

Tensiunea tangențială produsă de momentul de răsucire se calculează cu una din relațiile:

$$\tau_t = \frac{M_t}{k \cdot h \cdot b^2}, \quad \tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega \cdot t}, \quad \tau_t = \frac{M_t}{I_{td}} \cdot t, \quad (8.29)$$

în funcție de forma secțiunii barei, dreptunghiulară, profil subțire închis sau deschis, sau:

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t},$$

de la generalizarea relațiilor de calcul la răsucire.

În toate aceste cazuri trebuie avut în vedere că aceste tensiuni sunt maxime pe conturul exterior al secțiunii și au direcția tangență la contur.

Forța tăietoare produce tensiuni tangențiale ce se calculează cu formulele lui Juravski:

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z} \quad \text{și} \quad \tau_{xz} = \frac{T \cdot S'_z}{t \cdot I_z}. \quad (8.30)$$

Tensiunile tangențiale dintr-un punct oarecare al secțiunii dacă au direcții diferite se vor însuma geometric cu relația:

$$\tau = \sqrt{\tau_t^2 + \tau_f^2 + 2 \cdot \tau_t \cdot \tau_f \cdot \cos \alpha}, \quad (8.31)$$

unde:  $\alpha$  este unghiul format de cele două tensiuni.

Întrucât tensiunile tangențiale maxime  $\tau_{xy}$  și  $\tau_t$  sunt pe conturul exterior, unde iau valori maxime și sunt tangente la contur, pentru toate punctele de pe contur unghiul  $\alpha$  poate fi  $0^\circ$  sau  $180^\circ$ . **Astfel că pe conturul secțiunii tensiunile tangențiale se însumează algebric.** În general însumarea se face în punctele secțiunii în care cele două tensiuni sunt maxime și au același sens ( $\alpha = 0^\circ$ ):

$$\tau_{\max} = \tau_{t\max} + \tau_{xy} = \frac{M_t}{W_t} + \frac{T \cdot S_0}{b \cdot I_z} \quad (8.32)$$

Pentru barele lungi, tensiunile tangențiale produse de forța tăietoare au valori mici, în comparație cu  $\tau_t$  și ca atare nu se va lua în considerare efectul forței tăietoare ci numai cel al momentului de răsucire, astfel că:

$$\tau_{\max} \cong \tau_{t\max} = \frac{M_t}{W_t}. \quad (8.33)$$

**Ordinea operațiilor în calculul de rezistență al barelor de secțiune oarecare este următoarea:**

a) Se trasează diagramele de eforturi, se evidențiază secțiunile periculoase (unde eforturile sunt maxime) și se notează valorile eforturilor din fiecare secțiune periculoasă. În cazul calculului de capacitate de încărcare este bine ca în loc de valori să se scrie expresiile literare ale eforturilor;

b) Se efectuează calculul de rezistență cerut de problema respectivă și anume:

- **calculul de verificare al barei:** constă în calcularea și trasarea diagramei de variație a tensiunilor pentru fiecare efort din secțiunea periculoasă. Pentru punctele secțiunii cu tensiuni maxime se calculează tensiunile echivalente ce se compară cu tensiunea admisibilă;

- **sarcina capabilă:** În acest caz trebuie ca eforturile și tensiunile să fie exprimate în funcție de sarcina  $P$ , necunoscută, apoi din condiția  $\sigma_{\max} \leq \sigma_a$  se determină sarcina capabilă  $P$ . Acest calcul este posibil numai dacă expresiile eforturilor pot fi exprimate în funcție de un singur parametru și anume forța  $P$ .

**Dimensionarea barei solicitate compus** este de fapt o predimensionare unde se consideră:

$$\sigma_{ap} = (0,5 \dots 0,9) \cdot \sigma_a, \quad (8.34)$$

și se calculează dimensiunile secțiunii ținând seama numai de efortul preponderent. Se adoptă dimensiunile și apoi se face verificarea luând în considerare tensiunile produse de toate solicitările din secțiunea periculoasă.

**Aplicația 8.3.** Să se verifice bara din figura 8.13 știind că este confecționată din OL 70 cu  $\sigma_a = 180$  MPa.

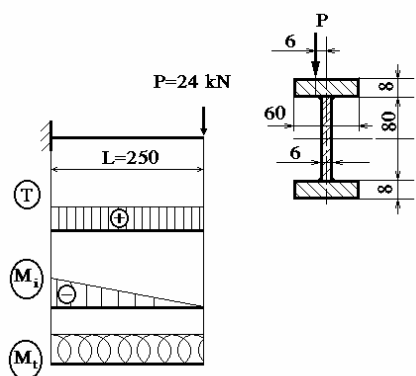


Fig. 8.13

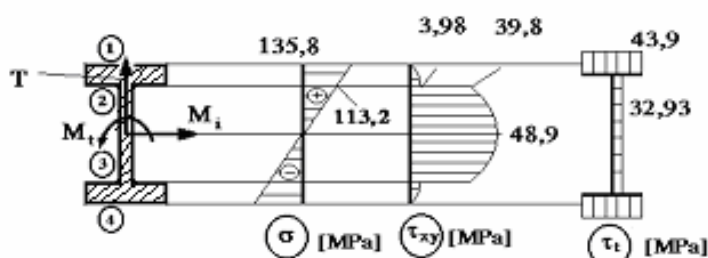


Fig. 8.14

**Rezolvare:** Diagramele de eforturi sunt reprezentate sub bară și se observă că secțiunea periculoasă este secțiunea din încastrare (secțiunea B) valorile eforturilor fiind:  $T = 24$  kN,  $M_i = -6$  kNm,  $M_t = 0,144$  kNm.

Mărimile geometrice necesare sunt:

$$I_z = (I_{zoi} + y_{oi}^2 \cdot A_i) = \frac{6 \cdot 9,6^3 - 5,4 \cdot 8^3}{12} = 212 \text{ cm}^4,$$

$$S_1 = S_4 = 0,$$

$$S_2 = S_3 = 6 \cdot 0,8 \cdot 4,4 = 21,12 \text{ cm}^3,$$

$$S_G = S_2 + 4 \cdot 0,6 \cdot 2 = 25,92 \text{ cm}^3,$$

$$I_t = \frac{1}{3} \sum b \cdot t^3 = \frac{1}{3} (2 \cdot 6 \cdot 0,8^3 + 8 \cdot 0,6^3) = 2,624 \text{ cm}^4,$$

$$W_{td} = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{2,624}{0,8} = 3,28 \text{ cm}^3,$$

$$W_{tdi} = \frac{I_t}{t_i} = \frac{2,624}{0,6} = 4,373 \text{ cm}^3.$$

Tensiunile corespunzatoare solicitărilor din secțiunea periculoasă sunt:

- la încovoiere:

$$\sigma_1 = -\sigma_4 = \frac{M_i \cdot y_i}{I_z} = \frac{-6 \cdot 10^6 \cdot (-48)}{212 \cdot 10^4} = 135,9 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{M_i \cdot y_3}{I_t} = \frac{-6 \cdot 10^6 \cdot (-40)}{212 \cdot 10^4} = 113,2 \text{ MPa},$$

- la forfecare:

$$\tau_{xy1} = \tau_{xy4} = 0$$

$$\tau_{xy2t} = \tau_{xy3t} = \frac{T \cdot S_2}{b_{2t} \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 21,12 \cdot 10^3}{60 \cdot 212 \cdot 10^4} = 3,985 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy2i} = \tau_{xy3i} = \frac{T \cdot S_2}{b_{2i} \cdot I_z} = \frac{24 \times 10^3 \times 21,12 \times 10^3}{6 \times 212 \times 10^4} = 39,85 \text{ MPa},$$

$$\tau_G = \frac{T \cdot S_G}{b_G \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 25,92 \cdot 10^3}{6 \cdot 212 \cdot 10^4} = 48,91 \text{ MPa},$$

- la rasucire:

$$\tau_{tmax} = \frac{M_t}{W_{td}} = \frac{0,144 \cdot 10^6}{3,28 \cdot 10^3} = 43,9 \text{ MPa},$$

$$\tau_{ti} = \frac{M_t}{W_{tdi}} = \frac{0,144 \cdot 10^6}{4,373 \cdot 10^3} = 32,93 \text{ MPa}.$$

Diagramele de variație a tensiunilor, pe secțiunea periculoasă sunt reprezentate în figura 8.14.

Calculând tensiunile echivalente cu una din teoriile de rezistență (teoria a V-a) și comparând cu rezistența admisibilă se obțin:

$$\sigma_{ech1} = \sigma_{ech4} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{135,9^2 + 3 \cdot 43,9^2} = 155,7 \text{ MPa} < \sigma_a$$

$$\sigma_{ech2t} = \sigma_{ech3t} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3 \cdot \tau_{2t}^2} = \sqrt{113,2^2 + 3 \cdot (43,9 + 3,985)^2} = 140,2 \text{ MPa} < \sigma_a$$

$$\sigma_{ech2i} = \sigma_{ech3i} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3 \cdot \tau_{2i}^2} = \sqrt{113,2^2 + 3 \cdot (39,85 + 32,93)^2} = 169,4 \text{ MPa} < \sigma_a$$

$$\sigma_{echG} = \sqrt{3} \cdot \tau_G = \sqrt{3} \cdot (48,91 + 32,93) = 141,8 \text{ MPa} < \sigma_a$$

Deci, **bara rezistă**.

**Aplicația 8.4.** Să se determine momentele capabile să le suporte secțiunea periculoasă a barei din figura 8.15, dacă  $M_t = 2 \cdot M_i$  și  $\sigma_a = 150$  MPa.

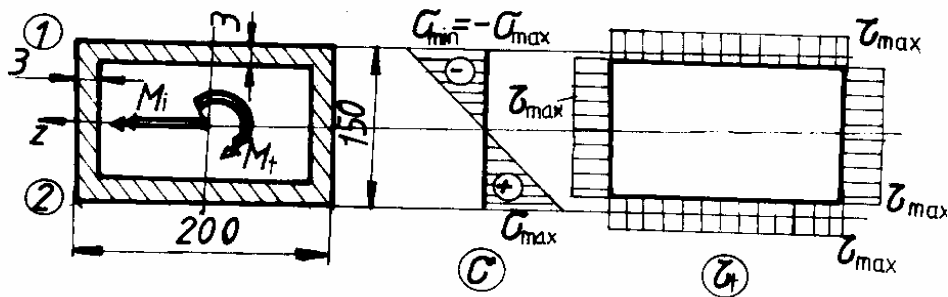


Fig. 8.15

**Rezolvare:** Mărimile geometrice necesare sunt:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{20 \cdot 15^3 - 19,4 \cdot 14,4^3}{12 \cdot 7,5} = 106,4 \text{ cm}^3$$

$$W_t = 2 \cdot \Omega \cdot t_{\min} = 2 \cdot 19,7 \cdot 14,7 \cdot 0,3 = 173,8 \text{ cm}^3.$$

Deoarece cele mai solicitate puncte ale secțiunii sunt cele de pe liniile 1 și 2 (vezi diagramele tensiunilor) sarcinile capabile se vor determina cu ajutorul unei teorii de rezistență (teoria III în acest caz) scrisă pentru acestea:

$$\sigma_{\text{ech}_1} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{\left(\frac{M_i}{W_z}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{M_t}{W_t}\right)^2} = M_i \cdot \sqrt{\frac{1}{W_z^2} + \frac{16}{W_t^2}},$$

din care se obține,

$$M_{i,\text{cap}} = \frac{\sigma_a \cdot W_z \cdot W_t}{\sqrt{W_t^2 + 16 \cdot W_z^2}} = \frac{150 \cdot 106,4 \cdot 173,8}{10^3 \cdot \sqrt{173,8^2 + 16 \cdot 106,4^2}} = 6,033 \text{ kNm}.$$

Se adoptă:  $M_{i,\text{cap}} = 6$  kNm și  $M_{t,\text{cap}} = 12$  kNm.

## 8.8. Întrebări - test

1. Ce sunt teoriile de rezistență?
2. Ce se înțelege prin tensiune echivalentă?
3. Ce teorii (ipoteze de rupere) de rezistență cunoașteți?
4. Enunțați teoria tensiunilor normale maxime.
5. Enunțați teoria deformațiilor specifice maxime.
6. Enunțați teoria tensiunilor tangențiale maxime.
7. Care sunt expresiile tensiunilor echivalente în cele cinci cazuri la solicitarea barelor?
8. Definiți solicitarea compusă.
9. Cum se clasifică solicitările compuse după natura tensiunilor din secțiunea unei bare?
10. Pentru care din situațiile de mai jos (solicitare și secțiune transversală) calculul de rezistență se poate face cu relația:

$$\sigma_{ech} = \frac{M_{iech}}{W_z} \leq \sigma_a ;$$

- a. Torsiune cu întindere – secțiune circulară;
  - b. Încovoiere plană simplă și torsiune – secțiune dreptunghiulară;
  - c. Încovoiere plană simplă și torsiune – secțiune circulară și inelară;
  - d. Încovoiere oblică cu forță tăietoare și torsiune - secțiune circulară și inelară;
  - e. Încovoiere oblică cu forță tăietoare și torsiune – secțiune dreptunghiulară;
  - f. Încovoiere oblică pură și torsiune – secțiune circulară și inelară;
  - g. Încovoiere obligă cu torsiune și întindere – secțiune circulară și inelară.
11. Ce este compresiunea excentrică? Cu cine este echivalentă?
  12. Încovoierea simplă plană este solicitare compusă sau nu?
  13. Care sunt expresiile momentului încovoiator echivalent pentru diferite teorii de rezistență?
  14. Care sunt etapele de calcul la dimensionarea arborilor drepți supuși la încovoiere și torsiune?
  15. De ce se neglijează de cele mai multe ori efectul forțelor tăietoare?

## 8.9. Probleme propuse

1. Să se dimensioneze arborele din fig. 8.16, dacă se impune ca acesta să aibă o secțiune inelară cu  $d=0,8D$  și să fie confecționat din oțel cu  $\sigma_a=120$  MPa.

2. Arborele din fig. 8.17 transmite prin roata motoare ① puterea  $P^*=24$  kW la o turație  $n=100$  rot/min. Să se dimensioneze acest arbore știind că  $\sigma_a=120$  MPa.

3. Să se dimensioneze arborele de secțiune inelară ( $d=0,8D$ ) din fig. 8.18 știind că este confecționat din oțel cu  $\sigma_a=120$  MPa.

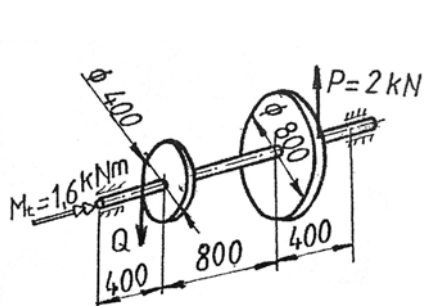


Fig. 8.16

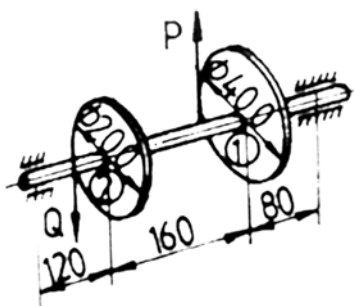


Fig. 8.17

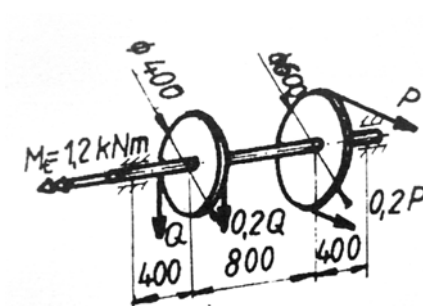


Fig. 8.18

4. Să se verifice grinzile cotite din fig 8.19 știind că sunt confecționate din oțel cu  $\sigma_a=130$  MPa. Se cunosc valorile sarcinilor

- $P_1=1,5$  kN,  $P_2=0,75$  kN;
- $P_1=20$  kN,  $P_2=1,5$  kN,  $P_3=2,4$  kN.

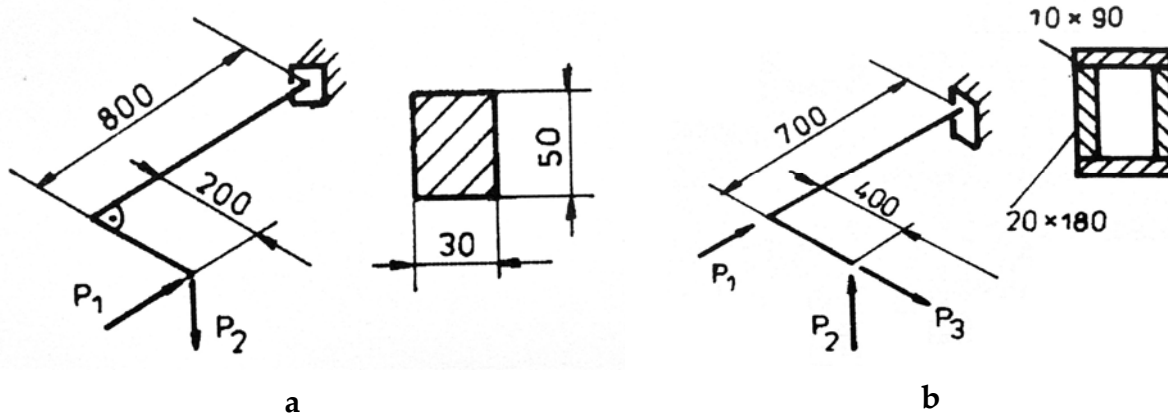


Fig. 8.19

5. Să se verifice bara din fig 8.20 dacă este confecționată dintr-un material cu  $\sigma_a=135$  MPa.

6. Să se verifice bara cotită din fig 8.21 dacă este confecționată dintr-un material cu  $\sigma_a=110$  MPa.

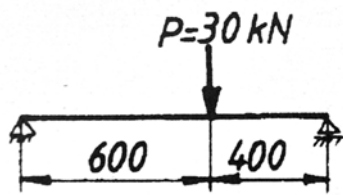


Fig. 8.20

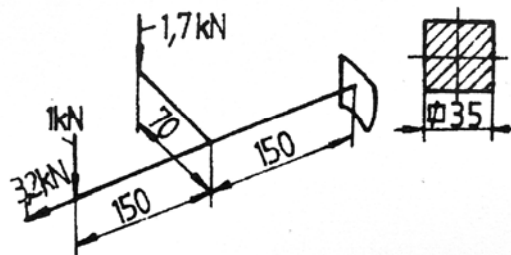
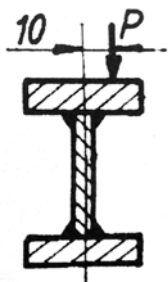


Fig. 8.21

7. Un cuțit de strung are forma și dimensiunile din fig. 8.22. Cunoscând valorile forțelor ce acționează asupra vârfului cuțitului ( $P_1=1,5$  kN,  $P_2= 0,75$  kN), se cere să se verifice acestă, dacă este confecționată dintr-un material cu  $\sigma_a=90$  MPa.

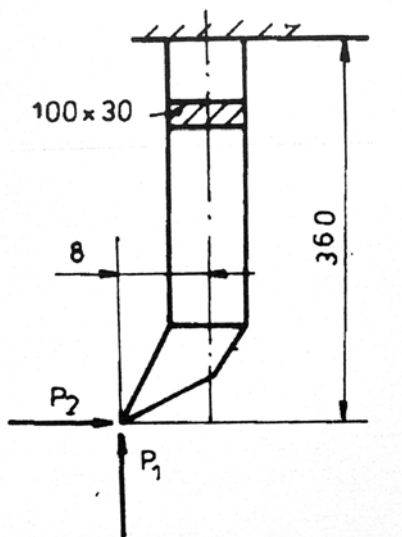


Fig. 8.22

8. Să se verifice arborele cardanic din fig. 8.23 știind că la axul din punctul A acesta primește un moment de torsiune  $M_t=2,4$  kNm. Se cunosc diametrul arborelui  $d=30$  mm,  $\alpha=30^\circ$  și  $\sigma_a=120$  MPa

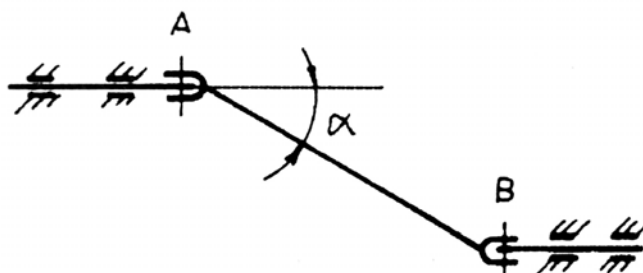


Fig. 8.23

9. Să se determine sarcinile capabile să le suporte structura cu secțiunea prezentată în fig. 8.24, dacă este confecționată dintr-un material  $\sigma_a=100$  MPa.

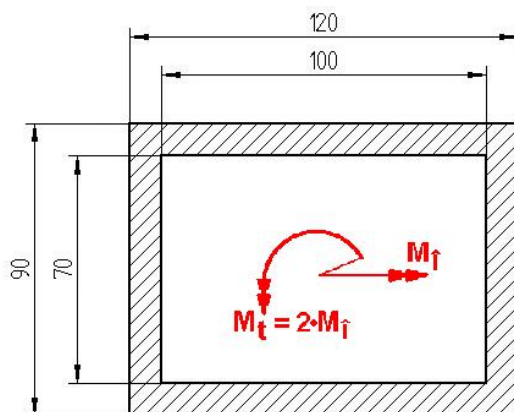


Fig. 8.24



**Rezistențe admisibile  
Pentru unele materiale folosite în construcția de mașini**

Materialul		Caracteristici mecanice				Rezistențe admisibile la tracțiune [MPa]			Celelalte rezistențe admisibile			
Grupa	Simbol	STAS	$\sigma_r$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]	$A_n$ [%]	I statică	II pulsantă	III alternant simetrică	Compr. $\frac{\sigma_{ac}}{\sigma_{at}}$	Încov. $\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{at}}$	Răsucire $\frac{\tau_{at}}{\sigma_{at}}$	Forfec. $\frac{\tau_{af}}{\sigma_{at}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Oțel carbon	OL 37	500/1-80	370-450	210-240	25-27	120-150	110-130	70-100	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8
	OL 44		420-500	230-260	22	130-160	110-140	80-110	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8
	OL 52		500-620	270-290	19	150-180	125-160	90-120	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8
	OL 60		min.700	340-360	10	210-250	160-200	110-150	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8
Oțel carbon de calit.	OIC 10 <sup>x</sup>	880-80	420	250	19	130-170	110-170	80-110	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8
	OLC25 <sup>xx</sup>		500	310	22	140-170	120-150	85-115	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8
	OLC45 <sup>xx</sup>		660	400	17	200-260	170-220	120-160	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8
Oțel aliat	18MC10	791-80	880	735	10	300-380-	230-320	150-220	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8
	33MoC11		880	690	12	300-380	230-280	180-230	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8
	13CN35		1130	930	10	380-460	280-380	190-260	1,0	1,1-1,2	0,6-0,65	0,8

**Anexa 1**  
**Tabelul 1 (continuare)**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Oțel turnat în piese	OT 40-2	600-74	400	200	24	100-130	80-110	50-75	1,1	1,1	0,6-0,65	0,8
	OT 50-2		500	280	18	130-180	100-130	70-95	1,1	1,1	0,6-0,65	0,8
Fonte grafit lamelar	Fc200	568-82	230*	-	-	60-80	50-70	30-45	2,5	-	1,2	-
	Fc300		330*	-	-	90-110	70-90	45-60	2,5	-	1,2	-
Fonte grafit lmodul.	Fgn45-5	6071-75	450	320	5	150-200	100-140	75-100	2,5	-	1,0-1,3 **	-
	Fgn60-2		600	400	2	200-260	130-170	90-120	2,5	-	1,0-1,3 **	-
Aliaje nefer.de turnare	Bz12T	197-80	200	-	6	40-60	30-50-30-	20-30	1,0	1,0	0,7	-
	AmT67	199/1-80	180	-	20	40-60	50	20-35	1,0	1,0	0,7	-
	ATMg3Si	201-77	130	-	3	40-75	30-55	20-35	1,0	1,1-1,2	0,7	-

**Observație:**

x călire și revenire joasă;

xx îmbunătățit;

\* pentru probe cu diametrul de 20 mm. Piese cu crustă de turnare;

\*\* 1,1 la solicitare I; 1,2 la solicitare II; 1,3 la solicitare III.

**Rezistențe de calcul la starea limită în MPa = N/mm<sup>2</sup> (Stas 10108 - 78)**

**I. Lamine din oțel**

Marca oțelului	Limita de curgere minimă $R_c$ sau $R_{0,2}$		$\gamma_m$	Rezistența de calcul ptr. întindere, compresiune și încovoiere	
	t < 16 mm	16 < t < 40 mm		t < 16 mm	16 < t < 40 mm
OL 34	210	200	1,10	190	180
OLT 35	230	220	1,10	210	200
OL 37, RCA 37	240	230	1,10	220	210
OLT 45	260	250	1,10	240	230
OL 44	280	270	1,12	260	250
OCS 44	265	255	1,12	260	250
OL 52	350	340	1,15	315	300
RCA 52, RCS 52	355	345	1,15	315	300
OCS 52	355	335	1,15	315	300
OCS 55	420	410	1,20	360	340
OCS 58	460	450	1,20	390	370

Valoarea limitei de curgere, respectiv a rezistenței de calcul (pentru grosimi t > 40) se obțin din relațiile următoare:

$$R_c = R_{cm} - 2 \cdot s; R = \frac{R_c}{\gamma_m},$$

în care:  $R_{cm}$  este media aritmetică a limitei de curgere;

s abaterea medie pătratică standard;

$\gamma_m$  coeficientul din tabelul de mai sus.

**II. Piese din oțel carbon și de calitate turnate sau forjate sau din fontă turnată**

Solicitarea	Simbol	Coef. $\gamma_m$	OT40	OT50	OLC35	Față de $R_i$	Fc150	Fc200
Întindere din încovoiere						$R_i = 1$	45	60
Compresiune din incov. sau din forță axială	R	1,0	150	210	210	R	160	180
Forfecare	$R_f$	0,6	90	130	130	0,36	35	45
Presiune locală	R	4,0	600	840	840	3,5	550	650
Presiune diametrală	$R_d$	0,04	6	8	8	-	-	-

III. Profile și table laminate

Solicitarea	Simbol	Coef. $\gamma_m$	OLT35	OL37, RCA37	OLT45	OL44, OCS44	OL52, OCS52, RCA52, RCB52	OCS55	OCS58
Întindere, compresiune, încovoiere	R	1,0	200	200	230	250	300	340	370
Forfecare	$R_f$	0,6	120	120	140	150	180	210	220
Presiune locală de contact	$R_1$	0,4	800	840	920	1000	1200	1360	1500
Presiune pe plan diametral	$R_d$	0,04	8	8,4	9,2	10	12	13,6	15
<b>Rezistențe de calcul pentru profile și table cu grosimi <math>t \leq 16</math>mm</b>									
Întindere, compresiune, încovoiere	R	1,0	210	220	240	260	315	360	390
Forfecare	$R_f$	0,6	125	130	145	155	190	215	235
<b>Rezistențe de calcul pentru cordoane de sudură</b>									
Întindere, compresiune, încovoiere *	$R_i^s$	1,0	200	210	230	250	300	340	370
Întindere, suduri necontrolate *	$R_i^s$	0,8	160	170	180	200	240	280	300
Compresiune *	$R_c^s$	1,0	200	210	230	250	300	340	370
Forfecare *	$R_f$	0,6	120	130	140	150	180	210	220
Forfecare **	$R_f$	0,7	140	150	160	170	210	240	260
<b>Rezistențe de calcul pentru cordoane de sudură la profile laminate cu grosimi <math>t \leq 16</math>mm</b>									
Întindere, suduri controlate *	$R_i^s$	1,0	210	220	240	260	315	360	390
Întindere, suduri necontrolate *	$R_i^s$	0,8	170	175	190	210	250	290	310
Compresiune *	$R_c^s$	1,0	210	220	240	260	315	360	390
Forfecare *	$R_f$	0,6	125	130	145	155	190	215	235

**Observație:** \* Sudură cap la cap; \*\* Sudură de colț.

Valorile caracteristicilor E, G,  $\nu$  și  $\alpha$ 

Material	E [GPa]	G [GPa]	$\nu$	$\alpha \cdot 10^{-6}$ [ $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ]
Oțel carbon	200 - 215	78 - 85	0,26 - 0,29	11 - 13
Oțel aliat	190 - 220	81 - 83	0,25 - 0,3	11 - 13
Oțel turnat nerecopt	175- 185	80 - 85	-	11 - 12
Oțel inoxidabil	190 - 200	66 - 75	0,25 - 0,32	15 - 18
Fontă cenușie și albă	75 - 160*	32 - 52*	0,2 - 0,27	10 - 12
Fontă perlitică maleabilă	160 - 185*	68 - 80*	-	10 - 13
Aluminiu	69 - 70	$\approx 26$	0,32 0,33	23 - 24
Duraluminiu (Al-Cu-Mg)	69 - 75	27 28	0,32 - 0,33	23 - 24
Aliaje de AL cu siliciu	$\approx 76$	$\approx 30$	$\approx 0,27$	$\approx 18$
Aliaje de AL cu magnez.	43 - 45	16 - 18	$\approx 0,35$	23 - 26
Cupru laminat la rece	110 - 130	$\approx 49$	0,31 - 0,34	16 - 17
Alamă	90 - 130	35 49	0,32 - 0,42	18 - 20
Bronz	90 - 120	$\approx 43$	0,31 - 0,35	14 - 18
Plumb	14 - 17	$\approx 7$	0,4 0,45	$\approx 29$
Lemn de brad în lungul fibrelor	9 - 13	4,5 - 6 5	-	2 - 6
Lemn de stejar în lungul fibrelor	12 - 14	4,5 - 6,5	-	2 - 5
Lemn perpendicular pe fibre	4 - 11	4,5 - 6,5	-	-
Beton cu $\sigma_r = 10 - 30 \text{ MPa}$	15 - 27	-	0,16 - 0,18	9 - 12
Beton armat comprimat	18 - 43	-	0,18 - 0,3	10 - 12
Beton armat încovoiat	11 - 30	-	0,18 - 0,3	10 - 14
Zidărie de cărămidă	2,5 - 3	-	-	-
Piatră de calcar, granit	42 - 49	-	-	-
Sticlă	45 - 100	21 - 23	0,24 - 0,27	2 - 8
Celuloid	1,4 - 2,7	0,6 - 0,8	0,35 - 0,45	6 - 7
Rășini epoxidice	2,5 - 4	-	-	30 - 60
Bachelit	2 - 6	0,7 - 2	0,35 - 0,38	-
Polistiren	3 - 5	-	-	130
Polietilenă	1 - 2,5	$\approx 3$	-	270
Pertinax	$\approx 2,5$	-	-	-
Textolit fibre	6 - 10	2,2	-	-
Cauciuc	-0,2 - 0,6	0,0012- 0,0014	$\approx 0,5$	-

**Observație:** \* La fontă E și G scad odată cu creșterea solicitării.

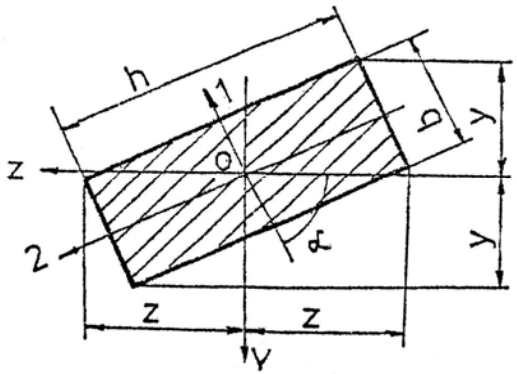
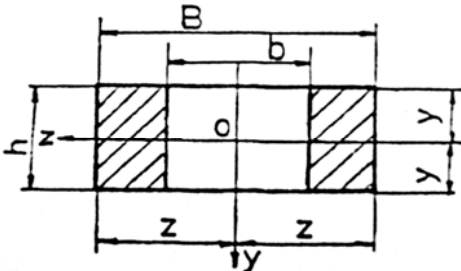
## Coeficienți de siguranță la solicitarea monoaxială și temperatură normală \*

Solicitarea		Cedarea materialului prin:		Coeficientul de siguranță față de :				
Modul	Felul			Deformare	Rupere	Oboseală	Flambaj**	
Statică	Întindere	Deformare tenace	$\sigma_c \text{ sau } \sigma_{0,2}$	1,2 - 2	-	-	-	
		Rupere tenace	$\sigma_r$	-	2 - 3	-	-	
		Rupere fragilă	$\sigma_r$	-	2 - 4	-	-	
	Compresiune	Deformare tenace	$\sigma_c \text{ sau } \sigma_{0,2}$	1,2 - 2-	-	-	-	-
Flambaj		$\sigma_c \text{ sau } \sigma_{0,2}$	-	-	-	3 - 5		
Rupere tenace		$\sigma_r$	-	2 - 4	-	3 - 5		
Rupere fragilă		$\sigma_r$	-	-	-	-		
Variabilă periodică	Cicluri simetrice	Oboseală	$\sigma_{-1t}$	-	-	2 - 3	-	
		Flambaj	$\sigma_f$	-	-	-	3 - 5	
	Cicluri pulsante la întindere	Deformare tenace	$\sigma_c \text{ sau } \sigma_{0,2}$	1,2 - 2	-	-	-	-
		Oboseală tenace	$\sigma_{ot}$	-	-	2 - 3	-	
		Rupere fragilă	$\sigma_r$	-	2 - 4	-	-	
		Oboseală fragilă	$\sigma_{ot}$	-	-	2 - 3	-	
	Cicluri pulsante la compresiune	Deformare tenace	$\sigma_c \text{ sau } \sigma_{0,2}$	1,2 - 2	-	-	-	-
		Oboseală tenace	$\sigma_{ot}$	-	-	-	-	3 - 5
		Rupere fragilă	$\sigma_r$	-	2 - 4	-	-	
Oboseală fragilă		$\sigma_{ot}$	-	-	2 - 3	-		
Flambaj		$\sigma_f$	-	-	-	3 - 5		

Observație: \* După Wellinger - Dietmann, Festigkeitsberechnung, Alfred Kröner Verlag;

\*\* Față de sarcina critică de flambaj elastic.

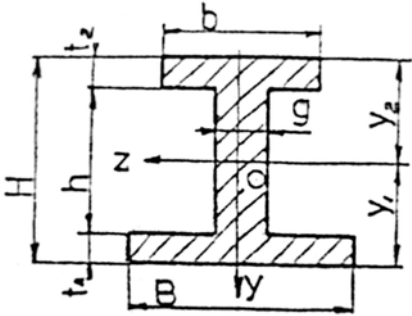
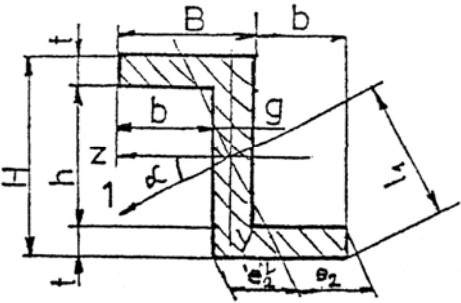
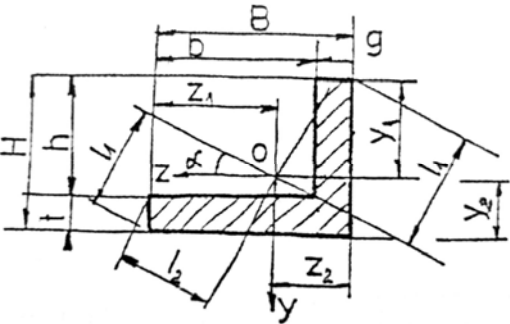
MĂRIMI GEOMETRICE

<p>ECȚIUNEA Axele principale: 1 și 2 Axele centrale: z și y</p>	<p>ARIA A</p>	<p>DISTANȚE MAXIME până la punctele extreme de la axele principale</p>	<p>MOMENTE DE INERȚIE PRINCIPALE față de axele inițiale alese</p>	<p>MODULE DE REZISTENȚĂ <math>W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}</math> RAZE DE INERȚIE <math>i_1 = \sqrt{I_1/A}, i_2 = \sqrt{I_2/A}</math></p>
1	2	3	4	5
<p>1. Dreptunghi înclinat</p> 	<p><math>A = b \cdot h</math></p>	<p><math>z_1 = \frac{h \cdot \cos \alpha + b \cdot \sin \alpha}{2}</math> <math>y_1 = \frac{h \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha}{2}</math></p>	<p><math>I_z = A \left( \frac{h^2 + b^2}{24} + \frac{h^2 - b^2}{24} \cos 2\alpha \right)</math> <math>I_y = A \left( \frac{h^2 + b^2}{24} + \frac{h^2 - b^2}{24} \sin 2\alpha \right)</math> Pentru: <math>\alpha \neq 0^\circ</math> <math>I_z \neq I_1, I_y \neq I_2</math></p>	<p><math>i_z = \sqrt{\frac{h^2 + b^2}{24} + \frac{h^2 - b^2}{24} \cos 2\alpha}</math> <math>i_z = \sqrt{\frac{h^2 + b^2}{24} + \frac{h^2 - b^2}{24} \cos 2\alpha}</math></p>
<p>2. Dreptunghi cu gol simetric</p> 	<p><math>A = h \cdot (B - b)</math></p>	<p><math>z_{\max} = \frac{B}{2}</math> <math>y_{\max} = \frac{h}{2}</math></p>	<p><math>I_y = I_1 = \frac{B^2 - b^2}{12} h</math> <math>I_y = I_{21} = \frac{B - b}{12} h^3</math></p>	<p><math>W_1 = \frac{B^3 - b^3}{6B} h</math> <math>W_1 = \frac{B^3 - b^3}{6B} h</math> <math>i_1 = \sqrt{\frac{B^2 + Bb + b^2}{12}}</math> <math>i_2 = \frac{h}{\sqrt{12}}</math></p>

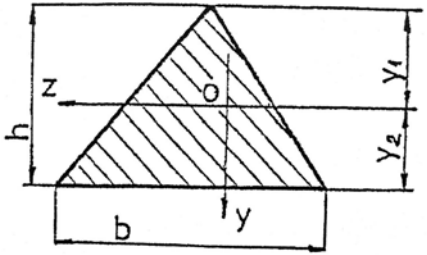
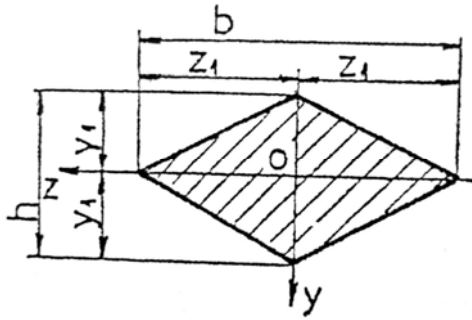
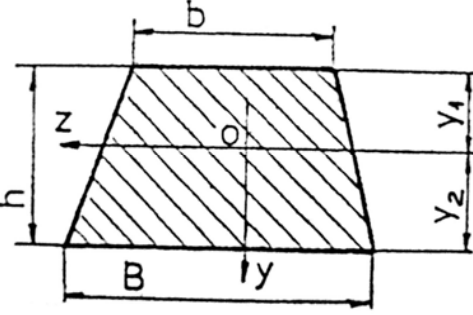
Anexa 4 (continuare)

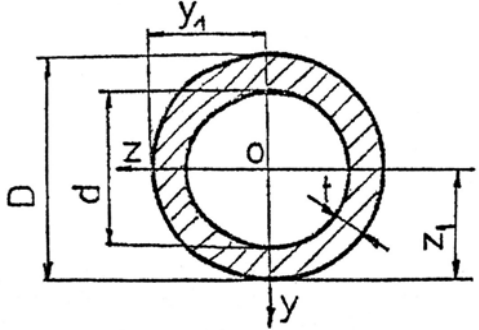
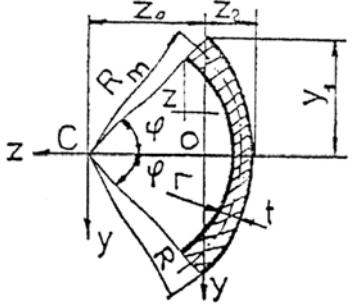
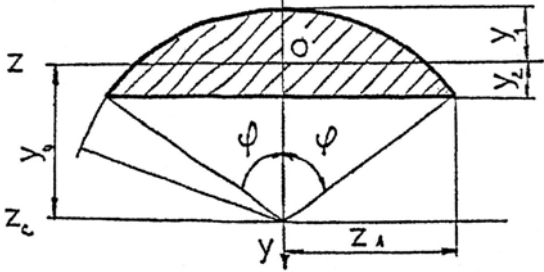
1	2	3	4	5
<b>3. Pătrat cu gol simetric</b> 	$A = H^2 - h^2$	$z_1 = y_1 = \frac{H}{2}$ $u_1 = v_1 = \frac{H \cdot \sqrt{2}}{2}$	$I_z = I_y = I_u = I_v = \frac{H^2 - h^2}{12}$	$W_z = W_y = \frac{H^4 - h^4}{6H}$ $W_u = W_v = \frac{H^4 - h^4}{6H\sqrt{2}}$ $i_z = i_y = i_u = i_v = \sqrt{\frac{H^2 + h^2}{12}}$
<b>4. Secțiuni compuse simetrice</b> 	$A = (B \cdot H - b \cdot h)$	$y_1 = \frac{H}{2}$ $z_1 = \frac{B}{2}$ $z_3 = \frac{B^2 \cdot H - b^2 \cdot h}{2(B \cdot H - b \cdot h)}$	$I_z = I_1 = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$ $I_{y_1} = I_2 = \frac{B^3 \cdot H - b^3 \cdot h}{12}$ $I_{y_2} = I_2 = \frac{B^3(H - h) + (B - b)^3 h}{12}$ $I_{y_3} = I_2 = I_{y_1} + B \cdot H \cdot \left(z_3 - \frac{B}{2}\right)^2 - b \cdot h \cdot \left(z_3 - \frac{b}{2}\right)^2$	$W_z = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6H}$ $W_{y_1} = W_{y_2} = \frac{B^3 \cdot H - b^3 \cdot h}{6B}$ $W_{y_3} = \frac{I_{y_3}}{z_3}$ $i_z = \sqrt{\frac{B \cdot H^3 - b^3 \cdot h}{12(B \cdot H - b \cdot h)}}$
<b>5. Secțiuni compuse simetrice</b> 	$A = B \cdot H + b \cdot h$	$z_1 = \frac{H}{2}, y_1 = \frac{B}{2}$ $z_3 = \frac{b^2 \cdot h + B \cdot H(B + 2b)}{2(B \cdot H + b \cdot h)}$	$I_z = I_1 = \frac{B \cdot H^3 + b \cdot h^3}{12}$ $I_{y_1} = I_2 = \frac{B^3(H - h) + (B + b)^3 h}{12}$ $I_{y_2} = I_2 = \frac{(B + b)^3 H - b^3(H - h)}{12}$ $I_{y_3} = I_2 = \frac{B^3 h + b^3 h}{12} + BH \left(z_3 - \frac{B}{2} - b\right)^2 + bh \left(z_3 - \frac{b}{2}\right)^2$	$W_z = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$ $W_{y_1} = \frac{B^3(H - h) + (B + b)^3 h}{6(B + b)}$ $W_{y_2} = \frac{(B + b)H - b(H - h)}{6(B + b)}$ $W_{y_3} = \frac{I_{y_3}}{z_3}$

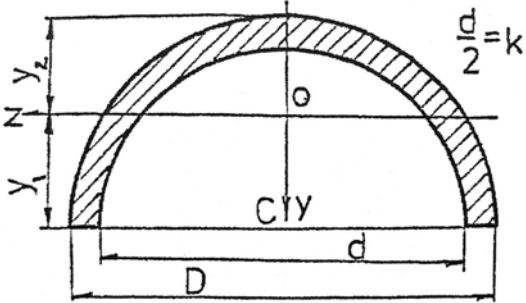
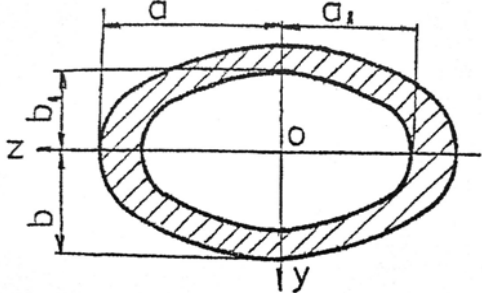
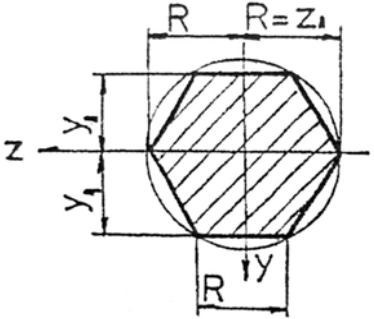


1	2	3	4	5
<p><b>6. Secțiune dublu T</b></p> 	<p><math>A = (Bt_1 + bt_2 + gt)</math></p>	<p> <math>y_1 = y</math>  <math display="block">= \frac{Bt_1^2 + bt_2(2H - t_2) + gh(2t_1 + h) + gh}{2(Bt_1 + bt_2 + gh)}</math> <math>y_2 = H - y_1</math> </p>	<p> <math display="block">I_y = \frac{B^3t_1 + b^3t_2 + g^3h}{12}</math> <math display="block">I_z = \frac{By_1^3 - (B - g)(y_1 - t_1)^3}{3} + \frac{by_2^3 - (b - g)(y_2 - t_2)^3}{3}</math> </p>	<p> <math display="block">W_y = \frac{B^3t_1 + b^3t_2 + g^3h}{6B}</math> <math display="block">W_{z1} = \frac{I_z}{y_1}, \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2}</math> <math display="block">i_y = \sqrt{\frac{B^3t_1 + b^3t_2 + g^3h}{12(Bt_1 + bt_2 + gh)}}</math> <math display="block">i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}</math> </p>
<p><b>7. Secțiune Z</b></p> 	<p><math>A = (BH - bh)</math></p>	<p> <math display="block">e_1 = \frac{H}{2} \left( \cos\alpha + \frac{2B - g}{H} \sin\alpha \right)</math> <math display="block">e_2 = \frac{h}{2} \left( -\sin\alpha + \frac{2B - g}{H} \cos\alpha \right)</math> <math display="block">e_2' = \frac{H}{2} \left( \sin\alpha + \frac{g}{H} \cos\alpha \right)</math> </p>	<p> <math display="block">I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12}</math> <math display="block">I_y = \frac{g^3h + 2B^3t}{12} + \frac{Bt}{2}(B - g)^2</math> <math display="block">I_{zy} = -\frac{Bt}{2}(B - g)(H - t)</math> <math display="block">I_1, I_2 = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}</math> <math display="block">\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctg \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}</math> </p>	<p> <math display="block">W_1 = \frac{I_1}{e_1}, \quad W_2 = \frac{I_2}{e_2}</math> <math display="block">i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}</math> <math display="block">i_z = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}</math> </p>
<p><b>8. Cornier</b></p> 	<p><math>A = (BH - bh)</math></p>	<p> <math display="block">z_1 = \frac{B^2H - b^2h}{2(BH - bh)}</math> <math display="block">y_1 = \frac{BH^2 - bh^2}{2(BH - bh)}</math> <math display="block">z_2 = B - z_1, \quad y_2 = H - y_1</math> <math display="block">e_1 = y_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha</math> <math display="block">e_2 = z_1 \cos\alpha - (y_2 - t) \sin\alpha</math> </p>	<p> <math display="block">I_z = \frac{By_2^3 - b(y_2 - t)^3 + gy_1^3}{3}</math> <math display="block">I_y = \frac{Hz_2^3 - h(z_2 - g)^3 + tz_1^3}{3}</math> <math display="block">I_{zy} = \frac{BH}{4}(B - 2z_1)(H - 2y_1) - \frac{bh}{4}(b - 2z_1)(h - 2y_2)</math> <math display="block">\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctg \frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}</math> </p>	<p> <math display="block">W_1 = \frac{I_1}{e_{1\max}}</math> <math display="block">W_2 = \frac{I_2}{e_{2\max}}</math> </p>

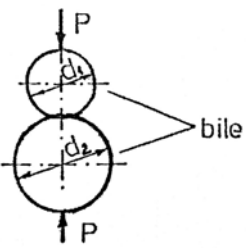
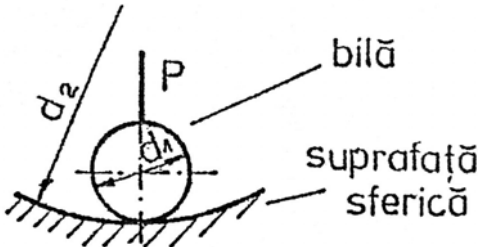
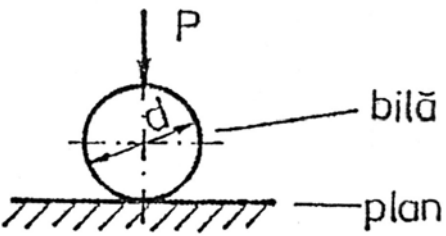
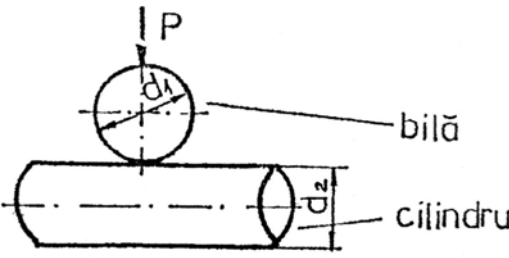
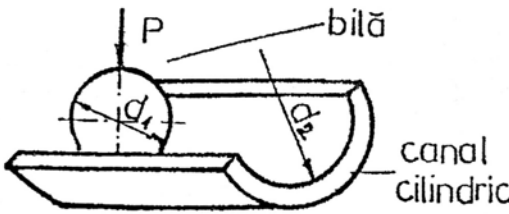
Anexa 4 (continuare)

1	2	3	4	5
<p><b>9. Triunghi</b></p> 	$A = \frac{bh}{2}$	$y_1 = \frac{2}{3}h$ $y_2 = \frac{1}{3}h$	$I_z = \frac{bh^3}{36}$	$W_{z1} = \frac{bh^2}{24}$ $W_{z2} = \frac{bh^2}{12}$ $I_z = \frac{h}{\sqrt{18}}$
<p><b>10. Romb</b></p> 	$A = \frac{bh}{2}$	$z_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$	$I_z = I_2 = \frac{bh^3}{48}$ $I_y = I_1 = \frac{b^3h}{48}$	$W_z = \frac{bh^2}{24}, \quad W_y = \frac{b^2h}{24}$ $i_z = \frac{h}{\sqrt{48}}, \quad i_y = \frac{b}{\sqrt{48}}$
<p><b>11. Trapez</b></p> 	$A = \frac{B+b}{2}h$	$y_1 = \frac{2B+b}{3} \cdot \frac{h}{3}$ $y_2 = \frac{2b+B}{3} \cdot \frac{h}{3}$	$I_z = \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{B+b} \cdot \frac{h^3}{36}$ <p><b>Pentru trapez isoscel</b></p> $I_y = \frac{h}{48}(B^3 + B^2b + Bb^2 + b^3)$	$W_{z1} = \frac{I_z}{y_1}, \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2}$ $i_z = \frac{h}{6(B+b)} \cdot \sqrt{2(B^2 + 4Bb + b^2)}$

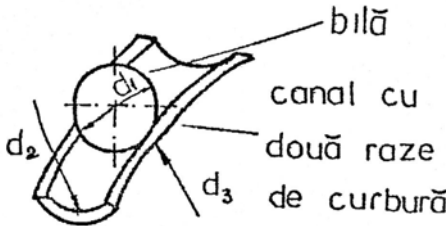
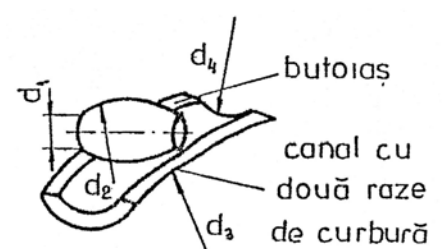
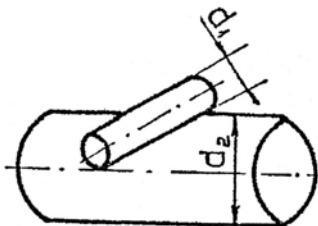
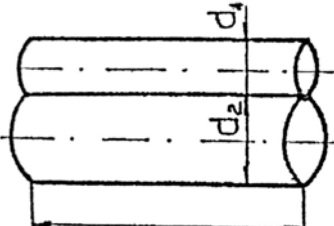
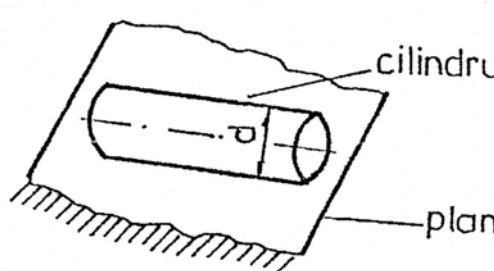
1	2	3	4	5
<p><b>12. Coroana circulară (k = d/D)</b></p> 	$A = \frac{\pi D^2}{4}(1-k^2)$ <p><b>Inel subțire</b></p> $A = \pi(D-t)t$ $t = \frac{D-d}{2}$	$z_1 = y_1 = \frac{D}{2}$ $t = \frac{D-d}{2}$	$I_z = I_y = I_1 = I_2 = \frac{\pi D^4}{64}(1-k^4)$ $I_z = I_y = \frac{\pi t}{64}(D-d)^3$	$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1-k^4)$ $i_2 = i_y = \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{4}}$ $W_z = W_y = \pi t \frac{(D-t)^3}{4D}$ $i_2 = i_y = \frac{D+t}{2\sqrt{2}}$
<p><b>13. Sector inelar</b></p> 	$A = (R^2 - r^2)\varphi$ <p><b>Sector de inel subțire</b></p> $A = 2tR_m\varphi$	$z_0 = \frac{2 \sin \varphi}{3\varphi} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ $z_1 = z_0 - r \cdot \cos \varphi$ $z_2 = R - z_0$ $z_0 = R_m \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ $y_1 = R_m \sin \varphi$	$I_z = \frac{R^4 - r^4}{8}(2\varphi - \sin 2\varphi)$ $I_y = \frac{R^4 - r^4}{8} \left( 2\varphi - \sin 2\varphi - \frac{32 \sin^2 \varphi}{9\varphi} \right) - \frac{4R^2 r^2 t \sin^2 \varphi}{9(R+r)\varphi}$ $I_2 = \frac{tR_m^3}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi)$ $I_y = \frac{tR_m^3}{2} \left( 2\varphi + \sin 2\varphi - \frac{4}{\varphi} \sin^2 \varphi \right)$	$W = \frac{R^4 - r^4}{8R} \cdot \frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{\sin \varphi}$ $W_{y1} = \frac{I_y}{z_1}, \quad W_{y2} = \frac{I_y}{z_2}$ $i_z = \sqrt{\frac{(R^2 - r^2)(2\varphi - \sin 2\varphi)}{8\varphi}}$ $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$
<p><b>14. Segment de cerc</b></p> 	$A = R^2 \frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{2}$	$z_1 = R \sin \varphi$ $y_0 = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \varphi}{2\varphi - \sin 2\varphi}$ $y_1 = R - y_0$ $y_2 = y_0 - R \cos \varphi$	$I_y = I_1 = \frac{AR^4}{4} \left( 1 - \frac{4 \sin^3 \varphi \cos \varphi}{3(2\varphi - \sin 2\varphi)} \right)$ $I_z = I_2 = \frac{AR^2}{4} \left( 1 + \frac{4 \sin^3 \varphi \cos \varphi}{2\varphi - \sin 2\varphi} - \frac{32 \sin^2 \varphi}{9(2\varphi - \sin 2\varphi)} \right)$	$W_y = \frac{I_y}{z_1}, \quad W_{z1} = \frac{I_z}{y_1}, \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2}$ $i_y = \frac{R}{2} \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{3(2\varphi - \sin 2\varphi)}}$ $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$

1	2	3	4	5
<p><b>15. Semicoroană circulară</b></p> 	$A = \frac{D^2 - d^2}{8} \pi$	$y_1 = \frac{2}{3\pi} \frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2}$ $y_2 = \frac{D}{2} - y_1$ $z_1 = \frac{D}{2}$	$I_y = I_1 = \frac{D^4 - d^4}{128} \pi$ $I_z = I_2 = \frac{D^4 - d^4}{128} \left( \pi - \frac{64}{9\pi} \right) - \frac{D^2 d^2}{18\pi} \frac{D - d}{D + d}$	$W_y = \frac{\pi D^3}{64} (1 - k^4)$ $W_{z1} = \frac{I_z}{y_1}, \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2}$ $i_y = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$
<p><b>16. Coroană eliptică</b></p> 	$A = \pi(ab - a_1 b_1)$	$y_1 = b$ $z_1 = a$	$I_y = I_1 = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a_1^3 b_1)$ $I_z = I_2 = \frac{\pi}{4} (ab^3 - a_1 b_1^3)$	$W_y = \frac{\pi}{4a} (a^3 b - a_1^3 b_1)$ $W_z = \frac{\pi}{4b} (ab^3 - a_1 b_1^3)$
<p><b>17. Hexagon regulat</b></p> 	$A = 1,5R^2 \sqrt{3}$	$y_1 = \frac{R}{2} \sqrt{3}$ $z_1 = R$	$I_z = I_y = I_1 = I_2 = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4$	$W_z = \frac{5}{8} R^3$ $W_y = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^3$ $i_z = i_y = R \sqrt{\frac{5}{24}}$

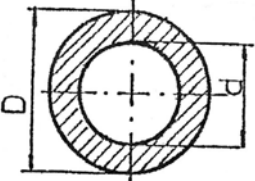
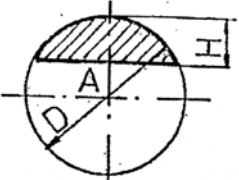
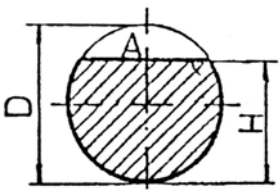
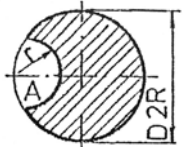
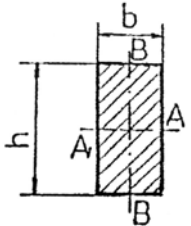
PRESIUNEA MAXIMĂ DE CONTACT

Schema corpurilor în contact	A	B	$P_{max}$
1	2	3	4
<p>1.</p> 	$\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}$	$\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}$	$0,62 \cdot \sqrt[3]{PE^2 \left( \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2} \right)^2}$
<p>2.</p> 	$\frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2}$	$\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}$	$0,62 \cdot \sqrt[3]{PE^2 \left( \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \right)^2}$
<p>3.</p> 	$\frac{1}{d}$	$\frac{1}{d}$	$0,62 \cdot \sqrt[3]{\frac{PE^2}{d^2}}$
<p>4.</p> 	$\frac{1}{d_1}$	$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$	$\alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{PE^2}{d_1^2}}$
<p>5.</p> 	$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}$	$\frac{1}{d_1}$	$\alpha \cdot \sqrt[3]{PE^2 \left( \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \right)^2}$

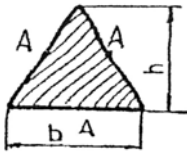
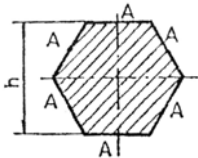
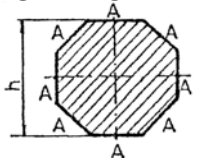
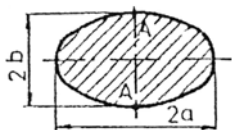
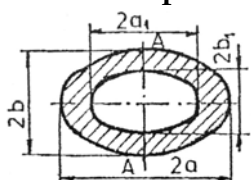
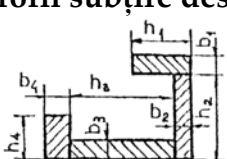

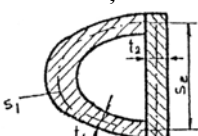
(continuare)

1	2	3	4
<p>6.</p>  <p>bilă canal cu două raze de curbură <math>d_1</math> <math>d_2</math> <math>d_3</math></p>	$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}$	$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$	$\alpha \cdot \sqrt[3]{PE^2 \left( \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \right)^2}$
<p>7.</p>  <p>butoiș canal cu două raze de curbură <math>d_1</math> <math>d_2</math> <math>d_3</math> <math>d_4</math></p>	$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_4}$	$\frac{1}{d_4} + \frac{1}{d_3}$	$\alpha \cdot \sqrt[3]{PE^2 \left( \frac{d_4 - d_2}{d_2 d_4} \right)^2}$
<p>8.</p>  <p>cilindri perpendiculari <math>d_1</math> <math>d_2</math></p>	$\frac{1}{d_2}$	$\frac{1}{d_1}$	$\alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{PE^2}{d_2^2}}$
<p>9.</p>  <p>cilindri paraleli <math>d_1</math> <math>d_2</math></p>	-	$\frac{1}{d_4} + \frac{1}{d_3}$	$0,59 \cdot \sqrt{\frac{PE}{L} \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}}$
<p>10.</p>  <p>cilindru plan <math>d</math></p>	-	$\frac{1}{d}$	$0,59 \cdot \sqrt{\frac{P \cdot E}{d \cdot L}}$

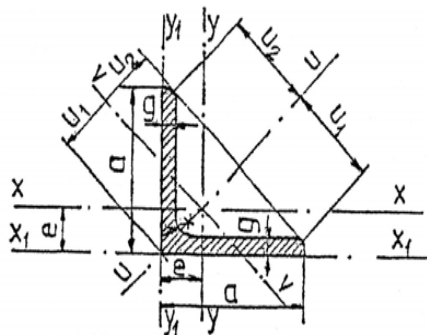
ELEMENTE GEOMETRICE LA RĂSUCIRE

Forma secțiunii transversale	Caracteristicile geometrice												Locul unde este $\tau_{\max}$
	de rezistență $W_t$ [cm <sup>3</sup> ]						de rigiditate $I_t$ [cm <sup>4</sup> ]						
1	2						3						4
<b>1. Coroană circulară</b> 	$W_t = \frac{\pi D^3}{16} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right)$						$I_t = \frac{\pi D^4}{32} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right)$						pe conturul exterior
<b>2. Segment de cerc</b>  pentru $2 < \frac{D}{H} < 8$	$W_t = \frac{D^3}{22,9} \left( \frac{2H}{D} \right)^{2,82}$						$I_t = 4,74 D^4 \left( \frac{2H}{D} \right)^{3,35}$						A
<b>3. Cerc fără segment</b> 	$W_t = \frac{D^3}{8} \cdot \frac{2,6H - D}{0,3H + 0,7D}$						$I_t = \frac{D^4}{16} \left( \frac{2,6H}{D} - 1 \right)$						A
<b>4. Cerc scobit</b> 	$W_t = \alpha R^3$						$I_t = \beta R^4$						A
	r/R	0	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5			
	$\alpha$	1,57	0,89	0,82	0,81	0,76	0,66	0,52	0,38	0,14			
	$\beta$	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07			
<b>5. Dreptunghi b &lt; h</b> 	$W_t = k_1 b^2 h$						$I_t = k_2 b^3 h$						A $\tau_B = k_3 \tau_A$
<b>h/b</b>	1	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5	3	4	5	6	8	10	$\infty$
<b>k<sub>1</sub></b>	0,208	0,221	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,292	0,299	0,307	0,313	0,333
<b>k<sub>2</sub></b>	0,141	0,172	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,292	0,299	0,307	0,313	0,333
<b>k<sub>3</sub></b>	1,0	0,292	0,859	0,820	0,795	0,766	0,752	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742	0,742

(continuare)

1	2	3	4
<b>6. Triunghi echilateral</b> 	$W_t = \frac{b^3}{20} = \frac{h^3}{12,99}$	$I_t = \frac{\sqrt{3}}{80} b^4 = \frac{h^3}{25,98}$	A
<b>7. Hexagon regulat</b> 	$W_t = 0,189h^3$	$I_t = 0,115h^4$	A
<b>8. Octogon regulat</b> 	$W_t = 0,185h^3$	$I_t = 0,108h^4$	A
<b>9. Elipsă</b> 	$W_t = \frac{\pi ab^2}{2} = \frac{\pi nb^2}{2}$ unde: $n = \frac{a}{b} \geq 1$	$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^3 + b^3} = \frac{\pi n^3 b^4}{n^2 + 1}$	A
<b>10. Coroană eliptică</b> 	$W_t = (1 - c^4)nb^3$ unde: $c = \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$ , $n = \frac{a}{b} \geq 1$	$I_t = \pi(1 - c^4) \frac{n^3 b^4}{n^4 + 1}$	A
<b>11. Profil subțire deschis</b> 	$W_t = \frac{\sum b_i^3 h_i}{3b_{\max}}$ $h_i > b_i$	$I_t = \frac{1}{3} \sum b_i^3 h_i$	la mijlocul dreptunghiului cu $b_{\max}$
<b>12. Arc de grosime t constantă</b> 	$W_t = \frac{st^2}{3}$ s = lungimea arcului	$I_t = \frac{st^3}{3}$	la mijlocul laturii
<b>13. Profil subțire închis</b> 	$W_t = 2\Omega t_{\min}$ $\Omega$ = aria închisă de fibra medie s	$I_t = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{s_i}{t_i}}$ s = este lungimea fibrei medii	în dreptul lui $t_{\min}$





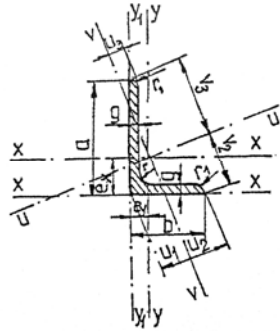
### OȚEL CORNIER CU ARIPI EGALE (STAS 424-80)

I – momente de inerție, W – module de rezistență,  $i = \sqrt{I/A}$  - rază de inerție  
(indicele dă axa în raport cu care s-au calculat)

Dimensiunile secțiunii	Aria secțiunii	Masa liniară	r	r <sub>1</sub>	Distanța axelor [cm]				Mărimile statice pentru axele de încovoiere							
									x - x și y - y			u - u		v - v		
					e	u <sub>1</sub>	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	I <sub>x</sub> = I <sub>y</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>x</sub> = W <sub>y</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>x</sub> = i <sub>y</sub> [cm]	I <sub>u</sub> [cm <sup>4</sup> ]	i <sub>u</sub> [cm]	I <sub>v</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>v</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>v</sub> [cm]
20*20*4	1,45	1,14	3,5	2,0	0,64	1,41	0,90	0,71	0,14	0,36	0,58	0,77	0,73	0,21	0,23	0,38
30*30*4	2,27	1,78	5	2,5	0,88	2,12	1,24	1,05	1,8	0,85	0,89	2,85	1,12	0,75	0,61	0,58
40*40*4	3,08	2,42	6	3	1,12	2,83	1,58	1,40	4,47	1,55	1,2	7,09	1,52	1,85	1,17	0,78
40*40*5	3,79	2,97	6	3	1,16	2,83	1,64	1,42	5,43	1,91	1,20	8,60	1,51	2,26	1,37	0,77
50*50*5	4,80	3,77	7	3,5	1,40	3,54	1,98	1,76	11,0	3,05	1,51	17,4	1,90	4,54	2,59	0,97
50*50*6	5,09	4,47	7	3,55	1,45	3,54	2,04	1,77	12,8	3,61	1,50	20,4	1,89	5,33	2,61	0,97
60*90*6	6,91	5,42	8	4	1,69	4,24	2,39	2,11	22,8	5,29	1,82	36,2	2,29	9,43	3,95	1,17
60*60*8	9,63	7,04	8	4	1,77	4,24	2,50	2,14	29,2	6,89	1,80	46,2	2,26	12,1	4,86	1,16
70*70*7	9,40	7,38	9	4,5	1,97	4,95	2,79	2,47	42,4	8,41	2,12	67,1	2,67	17,5	6,27	1,36
80*80*8	12,30	9,63	10	5	2,26	5,66	3,19	2,82	72,2	12,6	2,43	115	3,06	29,8	9,36	1,55
100*100*10	19,2	15,0	12	6	2,82	7,07	3,99	3,54	177	24,6	3,04	280	3,83	72,9	18,3	1,95
120*120*10	23,2	18,2	13	6,5	3,31	8,49	4,69	4,23	313	36,0	3,67	497	4,63	129	27,5	2,36
140*140*14	37,6	29,4	15	7,5	3,98	9,90	5,61	5,07	689	68,8	4,30	1094	5,42	284	50,5	2,74
150*150*16	45,7	35,9	16	8	4,29	10,6	6,07	5,34	949	88,7	4,56	1510	5,74	391	64,4	2,93
160*160*14	43,3	34,0	17	8,5	4,47	11,3	6,30	5,77	1046	90,8	4,92	1662	6,20	431	68,1	3,16
160*160*16	49,1	38,5	17	8,5	4,55	11,3	6,42	5,79	1175	103	4,89	1866	6,17	485	75,3	3,14

**OBSERVAȚIE** - Masa este calculată pentru dimensiunile nominale pe baza densității de 7,85 kg/dm<sup>3</sup>.

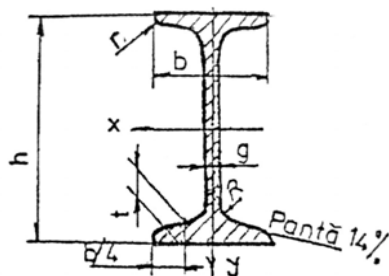
**OȚEL CORNIER CU ARIPI INEGALE (STAS 425-80)**



I – momente de inerție, W – module de rezistență,  $i = \sqrt{I/A}$  - rază de inerție  
 (indicele dă axa în raport cu care s-au calculat)

Dimensiunile secțiunii a*b*g  [mm]	Aria secțiuni  [cm <sup>2</sup> ]	Masa liniară  [kg/m]	r  [mm]	r <sub>1</sub>  [mm]	Distanța axelor [cm]							Unghiul de înclinare a axelor  tg(φ)	Mărimile statice pentru axe de încovoiere									
					x - x			y - y		u - u			v - v									
					I <sub>x</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>x</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>x</sub> [cm]	I <sub>y</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>y</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>y</sub> [cm]	I <sub>u</sub> [cm <sup>4</sup> ]		i <sub>u</sub> [cm]	I <sub>v</sub> [cm <sup>4</sup> ]	i <sub>v</sub> [cm]							
80*65*8	11,0	8,66	9	4	2,47	1,73	5,59	4,65	2,79	2,91	2,05	0,615	68,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,35
100*75*9	15,1	11,8	10	5	3,15	1,91	6,91	5,45	3,22	3,63	2,22	0,549	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	3,47	37,8	1,59

**OBSERVAȚIE:** -Momentul de inerție (I), modulul de rezistență (W), raza de girație (i) sunt raportate la axele de încovoiere respective.  
 - Masa este calculată pentru dimensiunile nominale pe baza densității de 7,85 kg/dm<sup>3</sup>.



## OȚEL I (STAS 565-80)

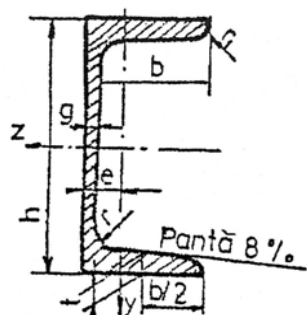
I – momente de inerție, W – module de rezistență,  $i = \sqrt{I/A}$  - rază de inerție  
(indicele dă axa în raport cu care s-au calculat)

Sibol I	Dimensiuni [mm]					Aria secțiunii [cm <sup>2</sup> ]	Mărimi geometrice inerțiale						S <sub>z</sub> [cm <sup>3</sup> ]	Simbol I
	h	b	t	g = R	r		z - z			y - y				
							I <sub>z</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>z</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>z</sub> [cm]	I <sub>y</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>y</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>y</sub> [cm]		
8	80	42	5,77	3,9	2,3	7,58	778	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4	8
10	100	50	6,64	4,5	2,7	10,6	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	10
12	120	58	7,52	5,1	3,1	14,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	12
14	140	66	8,40	5,7	3,4	18,3	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40	47,7	14
16	160	74	9,28	6,3	3,8	22,8	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0	16
1	180	82	10,16	6,9	4,1	27,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4	18
20	200	90	11,04	7,5	4,5	33,5	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125	20
22*	220	98	11,92	8,1	4,9	39,6	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	22*
24	240	106	12,80	8,7	5,2	46,1	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	24
26*	260	113	13,77	9,4	5,6	53,4	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	26*
28*	280	119	14,85	10,1	6,1	61,1	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	28*
30	300	125	15,82	10,8	6,5	69,1	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	30
32*	320	131	16,92	11,5	6,9	77,8	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	32*
36*	360	143	19,05	13,0	7,8	97,1	19610	1090	14,2	818	114	2,90	638	36*
40	400	155	21,10	14,4	8,6	118	29210	1460	15,7	1160	149	3,13	857	40

OBSERVAȚIE: \* Aceste profile nu mai sunt prevăzute în STAS 565 - 80

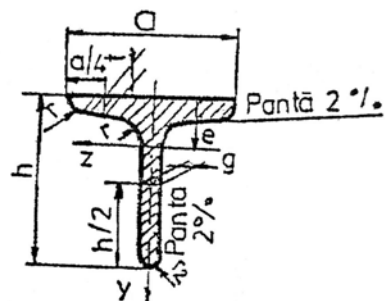
## OȚEL U (STAS 564-80)

I – momente de inerție, W – module de rezistență,  $i = \sqrt{I/A}$  - rază de inerție  
(indicele dă axa în raport cu care s-au calculat)



Sibol U	Dimensiuni [mm]					Aria secțiunii [cm <sup>2</sup> ]	Mărimi geometrice inerțiale						S <sub>z</sub> [cm <sup>3</sup> ]	e <sub>y</sub> [cm]	Simbol U
	h	b	t	g = R	r		z - z			y - y					
							I <sub>z</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>z</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>z</sub> [cm]	I <sub>y</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>y</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>y</sub> [cm]			
5*	50	38	5	7	35	7,12	26,4	10,6	1,92	9,12	3,75	1,13	6,43	1,37	5
6,5	65	42	5,5	7,28	4	9,03	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	10,6	1,42	6,5
8	80	45	6	7,76	4	11,0	1,06	26,5	3,1	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45	8
10	100	50	6	8,26	4,5	13,5	205	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55	10
12	120	55	7	8,72	4,5	17,0	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60	12
14	140	60	7	9,72	5	20,4	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75	14
16	160	65	7,5	10,20	5,5	24,0	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,84	16
18	180	70	8	10,68	5,5	28,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92	18
20	200	75	8,5	11,16	6	32,2	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01	20
22*	220	80	9	12,14	6,5	37,4	2690	245	8,45	197	33,6	2,30	146	2,14	22*
24	240	85	9,5	12,62	6,5	42,3	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23	24
26*	260	90	10	13,60	7	48,3	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36	26*
30	300	100	10	15,60	8	58,8	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70	30

**OBSERVAȚIE:** \* Aceste profile nu mai sunt prevăzute în STAS 564 - 80

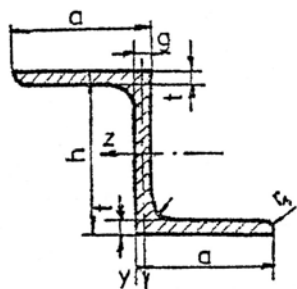


## OȚEL T (STAS 566-80)

I – momente de inerție, W – module de rezistență,  $i = \sqrt{I/A}$  - rază de inerție  
(indicele dă axa în raport cu care s-au calculat)

Denumirea T	Dimensiuni [mm]				Secțiunea A [cm <sup>2</sup> ]	Greutatea G [N/m]	e [cm]	Mărimi geometrice inerțiale						Denumirea T
	a=h	g=t=r	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>				z - z			y - y			
								I <sub>z</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>z</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>z</sub> [cm]	I <sub>y</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>y</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>y</sub> [cm]	
2*	20	3	1,5	1	1,12	0,88	0,58	0,38	0,27	0,58	0,20	0,20	0,42	2*
2,1/2*	25	35	2	1	1,65	1,29	0,73	0,87	0,49	0,73	0,43	0,34	0,51	2,1/2*
3	30	4	2	1	2,26	1,77	0,85	1,72	0,80	0,87	0,87	0,58	0,62	3
4	40	5	2,5	1	3,77	2,96	1,12	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83	4
5	50	6	3	1,5	5,66	4,44	1,39	12,10	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03	5

**OBSERVAȚIE:** \* Aceste profile nu mai sunt prevăzute în STAS 566 - 80



## OȚEL Z

I – momente de inerție, W – module de rezistență,  $i = \sqrt{I/A}$  - rază de inerție  
(indicele dă axa în raport cu care s-au calculat)

Denumirea Z	Dimensiuni [mm]					Secțiunea A [cm <sup>2</sup> ]	Greutate a G [N/m]	Mărimi geometrice inerțiale						Denumirea Z
	h	a	g=t	r	r			z - z			y - y			
								I <sub>z</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>z</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>z</sub> [cm]	I <sub>y</sub> [cm <sup>4</sup> ]	W <sub>y</sub> [cm <sup>3</sup> ]	i <sub>y</sub> [cm]	
8	80	65	6,0	6,0	3,0	12,0	9,42	123,9	30,98	3,21	94,0	15,17	2,80	8
10	100	75	6,5	6,5	3,25	15,5	12,20	251,4	50,29	4,02	158,0	22,02	3,19	10

**OBSERVAȚIE:** Greutatea teoretică este calculată cu greutatea specifică de 78,5 N/dm<sup>3</sup>.

# INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI LA PROBLEMELE PROPUSE

## Cap. 2 Forțe exterioare și forțe interioare

### Problema 1a

**Reacțiuni:**  $V_1=0,67P$ ,  $V_2=2,33P$ .

**Eforturi:**  $T_1=0,67P$ ,  $T_{2st}=-1,33P$ ,  $T_{2dr}=P$ ,  $T_{3st}=0,67P$ ,  $T_{3dr}=-0,33P$ ,  $T_{4st}=-0,33P$ ,  $T_{4dr}=-1,33P$ ,  $T_5=P$ .

$M_1=0$ ,  $M_2=-Pa$ ,  $M_3=-0,67Pa$ ,  $M_4=-0,33Pa$ ,  $M_5=0$ .

### Problema 1b

**Reacțiuni:**  $V_1=0,5P$ ,  $V_2=-0,5P$ .

**Eforturi:**  $T_{1st}=-P$ ,  $T_{1dr}=-0,5P$ ,  $T_2=0,5P$ ,  $T_3=-P$ ,  $T_{4st}=-0,5P$ ,  $T_{4dr}=0,5P$ .

$M_1=-1,5Pa$ ,  $M_2=-1,5Pa$ ,  $M_3=0$ ,  $M_4=-2Pa$ .

### Problema 1c

**Reacțiuni:**  $V_4=0$ ,  $M_4=0$ .

**Eforturi:**  $T_1=0$ ,  $T_{2st}=-P$ ,  $T_{2dr}=0$ ,  $T_{3dr}=-P$ ,  $T_{3st}=0$ ,  $T_4=0$ .

$M_1=-Pa$ ,  $M_2=-Pa$ ,  $M_3=0$ ,  $M_4=0$ .

### Problema 1d

**Reacțiuni:**  $V_4=-P$ .

**Eforturi:**  $T_1=0$ ,  $T_2=0$ ,  $T_{3st}=-P$ ,  $T_{3dr}=P$ ,  $T_4=P$ .

$M_1=-2Pa$ ,  $M_{2st}=-2Pa$ ,  $M_{2dr}=-Pa$ ,  $M_3=-Pa$ ,  $M_4=0$ .

### Problema 1e

**Reacțiuni:**  $V_1=3P$ ,  $V_2=0$ .

**Eforturi:**  $T_{1st}=-2P$ ,  $T_{1dr}=P$ ,  $T_{2st}=T_{2dr}=0$ ,  $T_3=-2P$ ,  $T_{4st}=-P$ ,  $T_{4dr}=0$ ,  $T_5=0$ .

$M_1=-2Pa$ ,  $M_2=-Pa$ ,  $M_3=0$ ,  $M_4=-Pa$ ,  $M_5=-Pa$ .

### Problema 1f

**Reacțiuni:**  $V_1=0$ ,  $V_2=0$ .

**Eforturi:**  $T_1=0$ ,  $T_2=0$ ,  $T_{3st}=0$ ,  $T_{3dr}=-P$ ,  $T_{4st}=-P$ ,  $T_{4dr}=P$ ,  $T_{5st}=P$ ,  $T_{5dr}=0$ .

$M_1=0$ ,  $M_2=0$ ,  $M_3=0$ ,  $M_4=-Pa$ ,  $M_5=0$ .

### **Problema 1g**

**Reacțiuni:**  $V_1=P$ ,  $V_2=P$ .

**Eforturi:**  $T_{1st}=0$ ,  $T_{1dr}=-P$ ,  $T_{2st}=P$ ,  $T_{2dr}=0$ ,  $T_3=0$ ,  $T_{4st}=-P$ ,  $T_{4dr}=P$ ,  $T_5=0$ .

$M_1=Pa$ ,  $M_2=Pa$ ,  $M_3=Pa$ ,  $M_4=0$ ,  $M_5=Pa$ .

### **Problema 1h**

**Reacțiuni:**  $V_1=P$ ,  $V_2=P$ .

**Eforturi:**  $T_1=P$ ,  $T_{2st}=0$ ,  $T_{2dr}=P$ ,  $T_{3st}=P$ ,  $T_{3dr}=0$ ,  $T_4=0$ ,  $T_5=P$ .

$M_1=0$ ,  $M_2=Pa$ ,  $M_3=-Pa$ ,  $M_{4st}=-Pa$ ,  $M_{4dr}=Pa$ ,  $M_5=0$ .

### **Problema 2a**

**Reacțiuni:**  $V_1=42,72$  [N],  $V_2=17,28$  [N].

**Eforturi:**  $T_{1st}=12$  [N],  $T_{1dr}=32,72$  [N],  $T_2=-17,28$  [N],  $T_3=0$ ,  $T_4=-3,28$  [N],  $T_{5st}=-5,28$  [N],

$T_{5dr}=-17,28$  [N],  $x_0=1,22$  [m].

$M_1=-2,4$  [Nm],  $M_2=0$ ,  $M_3=0$ ,  $M_4=12,86$  [Nm],  $M_5=8,64$  [Nm],  $M_{x_0}=13,33$  [Nm].

### **Problema 2b**

**Reacțiuni:**  $V_1=120$  [N],  $V_2=30$  [N].

**Eforturi:**  $T_{1st}=40$  [N],  $T_{1dr}=80$  [N],  $T_{2st}=-30$  [N],  $T_{2dr}=0$ ,  $T_3=0$ ,  $T_4=-30$  [N],  $T_5=0$ ,  $x_0=1,6$  [m].

$M_1=16$  [Nm],  $M_2=-15$  [Nm],  $M_3=0$ ,  $M_4=39$  [Nm],  $M_5=-15$  [Nm],  $M_{x_0}=48$  [Nm].

### **Problema 2c**

**Reacțiuni:**  $V_1=76,6$  [N],  $V_2=133,4$  [N].

**Eforturi:**  $T_1=76,6$  [N],  $T_{2st}=-73,4$  [N],  $T_{2dr}=60$  [N],  $T_3=-23,4$  [N],  $T_{4st}=-23,4$  [N],  $T_{4dr}=-73,4$  [N],

$T_5=60$  [N],  $x_0=1,92$  [m].

$M_1=0$ ,  $M_2=-72$  [Nm],  $M_3=66,5$  [Nm],  $M_4=45,44$  [Nm],  $M_5=0$ ,  $M_{x_0}=73,34$  [Nm].

### **Problema 2d**

**Reacțiuni:**  $V_1=108$  [N],  $V_2=42$  [N].

**Eforturi:**  $T_{1st}=-50$  [N],  $T_{1dr}=58$  [N],  $T_2=-42$  [N],  $T_3=0$ ,  $T_4=13$  [N],  $x_0=2,32$  [m].

$M_1=-50$  [Nm],  $M_2=0$ ,  $M_3=0$ ,  $M_{4st}=13,9$  [Nm],  $M_{4dr}=31,9$  [Nm],  $M_{x_0}=35,28$  [Nm].

### **Problema 2e**

**Reacțiuni:**  $V_1=81,06$  [N],  $V_2=65,94$  [N].

**Eforturi:**  $T_{1st}=-15$  [N],  $T_{1dr}=66,06$  [N],  $T_{2st}=-58,94$  [N],  $T_{2dr}=7$  [N],  $T_3=-15$  [N],  $T_4=7$  [N],

$x_0=1,32$  [m].

$M_1=-18$  [Nm],  $M_2=-9,1$  [Nm],  $M_3=0$ ,  $M_{x_0}=25,64$  [Nm].



### Problema 2f

**Reacțiuni:**  $H_1=60,62$  [N],  $V_1=63,1$  [N],  $V_2=171,9$  [N].

**Eforturi:**  $N_1=N_2=N_3=N_4=N_5=60,62$  [N],

$T_1=-63,1$  [N],  $T_{2st}=-35$  [N],  $T_{2dr}=136,9$  [N],  $T_3=-35$  [N],  $T_4=-13,1$  [N],  $T_{5st}=-13,1$  [N],  
 $T_{5dr}=-63,1$  [N],  $x_0=1,28$  [m].

$M_1=0$ ,  $M_2=-42$  [Nm],  $M_3=0$ ,  $M_4=112,75$  [Nm],  $M_5=100,96$  [Nm],  $M_{x0}=114,18$  [Nm].

### Problema 2g

**Reacțiuni:**  $H_4=51,96$  [N],  $V_4=70$  [N],  $M_4=95$  [Nm].

**Eforturi:**  $N_1=N_2=N_3=N_4=N_5=-51,96$  [N],

$T_1=30$  [N],  $T_2=30$  [N],  $T_3=-70$  [N],  $T_4=-70$  [N],  $x_0=2,05$  [m].

$M_1=0$ ,  $M_2=39$  [Nm],  $M_3=11$  [Nm],  $M_4=-95$  [Nm],  $M_{x0}=50,25$  [Nm].

### Problema 2h

**Reacțiuni:**  $H_1=95$  [N],  $V_1=33,4$  [N],  $V_2=152,22$  [N].

**Eforturi:**  $N_3=0$ ,  $N_{1st}=60$  [N],  $N_{1dr}=-35$  [N],  $N_2=N_4=-35$  [N],

$T_{1st}=0$ ,  $T_{1dr}=33,4$  [N],  $T_{2st}=-91,6$  [N],  $T_{2dr}=60,62$  [N],  $T_3=0$ ,  $T_4=60,62$  [N],  $x_0=0,67$  [m].

$M_1=0$ ,  $M_2=-72,74$  [Nm],  $M_3=0$ ,  $M_4=0$ ,  $M_{x0}=11,16$  [Nm].

## Cap. 3 Comportarea mecanică a elementelor de rezistență

Problema	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$\sigma_m$ [MPa]	$\tau_1$ [MPa]	$\alpha_1$ [°]
1a	100	0	50	50	90°
1b	-100	-100	-100	0	0° sau 90°
1c	100	-100	0	100	90°
1d	50	-50	0	50	-45°
1e	-50	-100	-75	25	90°
2a	68,75	-57,65	5	62,65	75,69°
2b	-19,65	-90,35	-55	35,35	-67,5°
2c	-1,85	-108,15	-55	53,15	65,59°
2d	-4,68	-85,31	-45	40,31	48,56°
2e	92,43	7,57	50	42,43	67,5°

Problema	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$\sigma_m$ [MPa]	$\tau_1$ [MPa]	$\alpha_1$ [°]	$\sigma_\alpha$ [MPa]	$\sigma_{\alpha+90^\circ}$ [MPa]	$\tau_\alpha$ [MPa]
3a	17,08	-117,1	-50	67,08	58,28°	-65,59	-34,41	-65,25
3b	48,31	-68,31	-10	58,31	-74,52°	-10,98	-9,02	58,30
3c	34,03	-94,03	-30	64,03	19,33°	-78,07	18,07	42,29
3d	3,85	-103,9	-50	53,85	-34,1°	3,30	-103,3	-7,68
3e	101,0	-1,0	50	51,0	39,35°	25,52	74,48	-44,73

Problema	$\varepsilon_1$ [μm / m]	$\varepsilon_2$ [μm / m]	$\varepsilon_m$ [μm / m]	$\gamma_1$ [μm / m]	$\alpha_1$ [°]
4a	1109	-216,4	446	1325	-6,38°
4b	373,7	-107,0	133,3	480,7	53,060°
4c	537,8	-204,5	166,7	742,3	-4,48°
4d	319,3	-219,3	50	538,3	-42,87°
4e	383,0	-317,2	32,9	700,2	29,25°
4f	333,3	-200	66,67	533,3	30°

Problema	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$\sigma_m$ [MPa]	$\tau_1$ [MPa]	$\alpha_1$ [°]
5a	48,10	-108,1	-30	78,10	-30°
5b	84,85	-84,85	0	84,85	0°
5c	95,31	14,69	55	40,31	55°
5d	114,9	-54,90	30	84,90	30°
5e	-3,97	-126,0	-65	61,03	-65°

Problema	$\varepsilon_1$ [μm / m]	$\varepsilon_2$ [μm / m]	$\varepsilon_3$ [μm / m]	$\varepsilon_m$ [μm / m]	$\gamma_1$ [μm / m]
5a	373,2	-578,9	80,0	102,9	952,1
5b	517,2	-517,2	0	0	103,4
5c	434,3	-57,14	-146,7	188,6	491,4
5d	620,1	-414,3	-80	102,9	1034
5e	149,2	-594,9	173,9	-222,9	774,0

Problema	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$\sigma_m$ [MPa]	$\tau_1$ [MPa]	$\alpha_1$ [°]	$\sigma_\alpha$ [MPa]	$\sigma_{\alpha+90^\circ}$ [MPa]	$\tau_\alpha$ [MPa]
6a	95,31	14,68	55	40,31	48,56°	17,86	92,14	15,67
6b	-80	-120	-100	20	-45°	-117,3	-82,7	-10
6c	0	-100	-50	50	45°	-82,1	17,9	38,3
6d	107,6	-17,6	45	62,6	-75,7°	15,0	75	55
6e	64,2	-34,2	15	49,2	11,98°	3,12	26,88	-47,78

Problema	$\varepsilon_1$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\varepsilon_2$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\varepsilon_3$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\varepsilon_m$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\gamma_1$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\varepsilon_\alpha$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\varepsilon_{\alpha+90}$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\gamma_\alpha$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]
6a	1292	-239,5	-518,6	526,4	1532	-179,3	1232	595,5
6b	-577,1	-1337	942,9	-957,1	760	-1286	-628,1	-380
6c	471,4	-1428	471,4	-478,6	1900	-1089	132,1	1455
6d	1621	-759,6	-424,3	430,7	2381	-139,3	1001	2090
6e	1079	-792	-141,4	143,6	1871	-82,2	369,3	-1815

Problema	$\varepsilon_1$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\varepsilon_2$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\varepsilon_m$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\gamma_1$ [ $\mu\text{m}/\text{m}$ ]	$\alpha_1$ [°]
7a	673,8	-620,5	26,67	1294	16,18°
7b	405,9	-203,9	101	609,8	49,63°
7c	1000	0	500	1000	60°
8a	666,7	-400,2	133,3	533,5	-45
8b	318,5	-213,7	52,4	266,1	-55,76°
8c	790,3	-590,3	100	690,3	69,63

Problema	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$\sigma_m$ [MPa]	$\tau_1$ [MPa]
7a	113,9	-98,4	7,75	106,2
7b	79,48	-20,56	29,46	50,02
7c	227,9	63,80	145,9	82,05
8a	126,4	-48,65	38,88	87,53
8b	58,94	-28,37	15,28	43,66
8c	142,4	-84,08	29,16	113,2

## Cap. 4 Mărimi geometrice ale secțiunilor

Problema	$I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_y$ [cm <sup>4</sup> ]	$W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	$W_y$ [cm <sup>3</sup> ]	$i_z$ [cm]	$i_y$ [cm]
1a	2572	792	321,5	176	5,35	3,07
1b	1246	171,5	178	42,875	5,45	2,02
1c	574,15	806,13	95,69	134,35	3,24	3,83
1d	1632	270	163,2	60	4,76	1,94
1e	4406,7	1626,7	607,82	542,22	3,71	2,25
1f	4793	1553,3	802,77	517,77	3,75	2,14

### Problema 2a

a = 107,6 mm;       $W_z = 1307 \text{ cm}^3$ ;       $W_y = 1118 \text{ cm}^3$ ;       $i_z = i_y = 11,9 \text{ cm}.$

### Problema 2b

a = 172,4 mm;       $W_z = 1071 \text{ cm}^3$ ;       $W_y = 862,5 \text{ cm}^3$ ;       $i_z = i_y = 11,1 \text{ cm}.$

### Problema 2c

a = 280,4 mm;       $W_z = 1071 \text{ cm}^3$ ;       $W_y = 668 \text{ cm}^3$ ;  $i_z = i_y = 11,1 \text{ cm}.$

Problema	$I_1$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_2$ [cm <sup>4</sup> ]	$\alpha_1$ [°]	$i_1$ [cm]	$i_2$ [cm]
3a	6713	527	-9,042	7,479	2,096
3b	582,3	187,7	-18,44	3,983	2,26
3c	5670	1495	-82,25	8,777	4,501

Problema	$I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_y$ [cm <sup>4</sup> ]	$W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	$W_y$ [cm <sup>3</sup> ]	$i_z$ [cm]	$i_y$ [cm]
4a	1392	123	99,43	27,33	6,218	1,848
4b	1088	80	108,8	26,67	4,761	1,291
4c	29090	25040	1763	1669	12,71	11,79

Problema	$I_z$ [cm <sup>4</sup> ]	$I_y$ [cm <sup>4</sup> ]	$W_z$ [cm <sup>3</sup> ]	$W_y$ [cm <sup>3</sup> ]	$i_z$ [cm]	$i_y$ [cm]
5a	17740	20570	1183	78,87	10,49	11,30
5b	2593	3004	172	375	4,273	4,60
5c	121300	129000	3557	3686	34,46	25,22
5d	27520	13160	7864	974,8	28,45	6,22
5e	19100	2390	1158	239	12,12	4,303
5f	266900	8500	7135	680	26,61	4,75
5g	3380	175	247	33,02	9,923	2,258
5h	3483	211	256	39,81	8,346	2,054

## Cap. 5. Solicitări axiale

### Problema 1a

$$d = 30 \text{ mm}; \quad \Delta l = 2,521 \text{ mm.}$$

### Problema 1b

$$d = 21 \text{ mm}; \quad \Delta l = 0,5866 \text{ mm.}$$

### Problema 2

$$\text{Se adoptă profil L } 50 \times 50 \times 5; \quad v_B = 2,521 \text{ mm.}$$

### Problema 3

$$x = 2,958 \text{ [m]}; \quad \sigma_{Cu} = 107,6 \text{ MPa}; \quad \sigma_{OL} = 150,6 \text{ MPa};$$

$$\Delta L = 0,897 \text{ mm (pentru } E_{Cu} = 120 \text{ GPa, vezi Anexa 2).}$$

### Problema 4

$$\ell = \frac{L}{2} = 400 \text{ m.}$$

### Problema 5

$$D = 120 \text{ mm}; \quad d = 100 \text{ mm}; \quad \Delta \ell_x = \frac{1}{E \cdot A} \left( P + \frac{\gamma \cdot A \cdot x}{2} \right) \cdot x = 186,2 \text{ mm.}$$

**Problema 6**

$$D_{Fo} = 60 \text{ mm}; \quad d_{Fo} = 48 \text{ mm}; \quad d_{OL} = 160 \text{ mm}; \quad d_{bet} = 860 \text{ mm};$$

**Problema 7**

$$P_{\max} = 3128 \text{ kN}.$$

**Problema 8**

$$H_1 = 146,7 \text{ kN}; \quad \sigma_{\max} = 68,16 \text{ MPa}; \text{ Bara rezistă} \\ (\text{pentru } E_{AL} = 70 \text{ GPa, vezi Anexa 2}).$$

**Problema 9**

$$H_1 = 29,4 \text{ kN}; \quad \sigma_{\max} = 147 \text{ MPa} > \sigma_a; \text{ Bara nu rezistă.}$$

**Problema 10a**

$$p_{cap} = 8 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

**Problema 10b**

$$p_{cap} = 3,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

**Problema 11**

$$P_{cap} = 245 \text{ kN}.$$

**Problema 12**

$$P_{cap} = 450 \text{ kN}.$$

**Problema 13**

$$\sigma_{Cu} = -100,4 \text{ MPa}; \quad \sigma_{OL} = -25,09 \text{ MPa}.$$

**Problema 14**

$$\sigma_{OL} = 147,6 \text{ MPa}; \quad \sigma_{OL} = -61,6 \text{ MPa}.$$

**Problema 15**

$$P_{cap} = 50 \text{ kN};$$

**Problema 16**

$$\text{a) } P=10 \text{ kN (compresiune), } P=6 \text{ kN (tracțiune)}$$

**Problema 17**

$$P_{cap} = 50 \text{ kN}; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 87,43 \text{ MPa}; \quad \sigma = 149 \text{ MPa}; \quad \Delta l = 2,13 \text{ mm}.$$

### Problema 18

$$N_1 = N_2 = 15,37 \text{ kN}; N = -26,6 \text{ kN}; \sigma_1 = \sigma_2 = 48,93 \text{ MPa}; \sigma = -84,76 \text{ MPa}.$$

### Problema 19

a).  $N_1 = N_2 = -22,7 \text{ kN}; N = -39,31 \text{ kN}; \sigma_1 = \sigma_2 = -72,25 \text{ MPa}; \sigma = -125 \text{ MPa};$

b).  $N_1 = N_2 = 0,3 \text{ kN}; N = -82,31 \text{ kN}; \sigma_1 = \sigma_2 = 0,955 \text{ MPa}; \sigma = -262 \text{ MPa} > \sigma_a;$

Sistemul de bare nu rezistă simultan la acțiunea forței și temperaturii.

### Problema 20

$$H_1 = 267,5 \text{ kN}; H_2 = -327,05 \text{ kN}; \sigma_{\max} = 94,61 \text{ MPa}; \sigma_{\min} = -115,7 \text{ MPa}.$$

## Cap. 6 Răsucirea barelor drepte

### Problema 1

Secțiuni posibile periculoase sunt secțiunea inelară sau cea circulară cu diametrul  $d_1$ . Se obține pe secțiunea inelară:  $D=88,36 \text{ mm}$ , iar pe secțiunea plină  $d_1=74,1 \text{ mm}$ . Se adoptă:  **$D=90 \text{ mm}$ ,  $d=72 \text{ mm}$ ,  $d_1=81 \text{ mm}$** . Cu aceste valori se calculează rotirea relativă:  $\Delta\varphi=2,894^\circ$ .

### Problema 2

Ridicând nedeterminarea se obține  $M_{t1}=0,3609M_t$  și  $M_{t2}=0,6931M_t$ . Secțiuni posibile periculoase sunt 3-4 sau 4-5. Se obțin dimensiunile:

- din condiția de rezistență:  $d=74,52 \text{ mm}$ ,  $D=88,53 \text{ mm}$ ;

- din condiția de rigiditate:  $d=75,35 \text{ mm}$ ,  $D=85,96 \text{ mm}$ .

Se adoptă:  **$D=95 \text{ mm}$  și  $d=76 \text{ mm}$** .

### Problema 3

Problema este static nedeterminată. Prin ridicarea nedeterminării utilizând cele trei aspecte (static, geometric și fizic), se obține:  $M_{t1}=0,04525M_t$  și  $M_{t2}=2,955M_t$ . Pentru secțiunea periculoasă pe porțiunea (4)-(5). Se obțin următoarele dimensiuni:

- din condiția de rezistență:  $d=40,89 \text{ mm}$ ;

- din condiția de rigiditate:  $d=40,39 \text{ mm}$ .

Se adoptă  **$d=41 \text{ mm}$** . (ptr  $d=40 \text{ mm}$  rezultă  $\tau_{\max} = 117,6 \text{ MPa} < 1,05 \tau_a$ .)

#### Problema 4

Problema este static nedeterminată și avem, conform cele trei aspecte (static, geometric și fizic):

$$\text{I. } M_{t1} + M_{t2} = M_t;$$

$$\text{II. } \Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2;$$

$$\text{III. } \frac{M_{t1} \cdot L}{G_1 \cdot I_{p1}} = \frac{M_{t2} \cdot L}{G_2 \cdot I_{p2}}$$

de unde se obține cu  $I_{p1} = 15708 \text{ mm}^4$ ;  $I_{p2} = 22642 \text{ mm}^4$ ;  $M_{t1} = 0,5393 M_t$ ;  $M_{t2} = 0,4607 M_t$ .

a) Tensiunile în cele două materiale sunt;

$$\tau_{t1} = 101,9 \text{ MPa}; \quad \tau_{t2} = 76,31 \text{ MPa} \quad \text{și} \quad \tau_{t2\text{min}} = 61,04 \text{ MPa}.$$

Reprezentarea este redată în fig.R.4.

b) Rotirea relativă a celor două secțiuni situate la distanța  $L$  una față de cealaltă va fi:

$$\Delta\varphi = \frac{M_{t1} \cdot L}{G_1 \cdot I_{p1}} = \frac{M_{t2} \cdot L}{G_2 \cdot I_{p2}} = \frac{0,5393 \times 300 \times 10^3 \times 400}{81 \times 10^3 \times 15706} = 0,05086 \text{ rad} = 2,914^\circ.$$

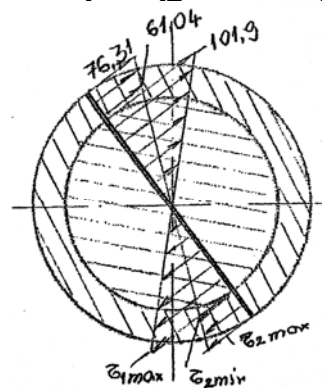


Fig.R.4

#### Problema 5

Se adoptă  $D_2 = 46 \text{ mm}$

#### Problema 6

a)  $M_{t\text{cap}} = 7,037 \text{ kNm}$ . Se adoptă  $M_t = 7 \text{ kNm}$ .

b) Din condiția de forfecare:

$$M_t = 2 \cdot F \cdot \frac{d}{2} = 2 \cdot L_1 \cdot b \cdot \tau_a \cdot \frac{d}{2} \text{ rezultă: } L_1 = 136,7 \text{ mm}.$$

Se adoptă  $L = 137 \text{ mm}$ .

Analog se calculează  $L_2 = 109,4 \text{ mm}$  și se adoptă  $L_2 = 110 \text{ mm}$ .

Presiunea de contact pe pană va fi:

$$p_{\text{str}_1} = \frac{F_1}{L_1 \cdot h_1} = 53,22 \text{ MPa} < \sigma_{\text{astr}};$$

$$p_{\text{str}_2} = \frac{F_2}{L_2 \cdot h_2} = 53,03 \text{ MPa} < \sigma_{\text{astr}}.$$

c) cunoscând rezistența la forfecare a unui șurub  $R_d = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \tau_a = 9048 \text{ N}$ , în

condiția  $M_t = n \cdot R_f \cdot \frac{D_1}{2}$ , rezultă  $n_1 = 5,52$  șuruburi.

Se adoptă  $n = 6$  șuruburi.



### Problema 7

$$\tau_A = 53,05 \text{ MPa}; \tau_B = 94,94 \text{ MPa}; \Delta\varphi = 0,01727 \text{ rad} = 59' 22''.$$

### Problema 8

a)  $\tau_{\max} = 118,6 \text{ MPa}; \tau_i = 94,94 \text{ MPa};$

c)  $\theta_{\max} = 1,465 \cdot 10^{-4} \text{ rad/mm} = 8^\circ 23' 38'' / \text{m}.$

### Problema 9

Pentru profil deschis:  $M_{td}=1,2 \text{ kNm}$ , iar tensiunea și rotirea maximă sunt:

$$\tau_{\max} = 94,41 \text{ MPa}; \tau_{ii} = 65,56 \text{ MPa};$$

$$\theta_{\max} = 9,033 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} = 5^\circ 20' 45'' / \text{m}.$$

Pentru profil închis:  $M_{ti}=56 \text{ kNm}$ , iar tensiunea și rotirea maximă sunt:

$$\tau_{\max} = 89,70 \text{ MPa}; \tau_{ii} = 60,42 \text{ MPa};$$

$$\theta_{\max} = 6,337 \cdot 10^{-4} \text{ rad/mm} = 0^\circ 21' 47'' / \text{m}.$$

### Problema 10

a)

Pentru profil deschis:  $M_{td}=0,7 \text{ kNm}$ , iar tensiunea și rotirea maximă sunt:

$$\tau_{\max} = 91,47 \text{ MPa}; \tau_{ii} = 55,21 \text{ MPa};$$

$$\theta_{\max} = 1,135 \cdot 10^{-4} \text{ rad/mm} = 6^\circ 30' 21'' / \text{m}.$$

Pentru profil închis:  $M_{ti}=12,6 \text{ kNm}$ , iar tensiunea și rotirea maximă sunt:

$$\tau_{i\max} = 90,12 \text{ MPa}; \tau_{ii} = 54,08 \text{ MPa};$$

$$\theta_{\max} = 6,050 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm} = 0^\circ 20' 48'' / \text{m}.$$

b)

Pentru profil deschis:  $M_{td}=0,4 \text{ kNm}$ , iar tensiunea și rotirea maximă sunt:

$$\tau_{i\max} = 90,58 \text{ MPa}; \theta_d = 2.237 \cdot 10^{-4} \text{ rad/mm} = 12^\circ 48' 52'' / \text{m}.$$

Pentru profil închis:  $M_{ti}=17 \text{ kNm}$ , iar tensiunea și rotirea maximă sunt:

$$\tau_{i\max} = 88,73 \text{ MPa}; \theta_d = 1.524 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} = 0^\circ 52' 24'' / \text{m}.$$

c)

Pentru profil deschis:  $M_{td}=1,3 \text{ kNm}$ , iar tensiunea și rotirea maximă sunt:

$$\tau_{\max} = 88,02 \text{ MPa}; \tau_{ii} = 36,67 \text{ MPa};$$

$$\theta_{d\max} = 9,057 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm} = 5^\circ 11' 22'' / \text{m}.$$

Pentru profil închis:  $M_{ti}=19 \text{ kNm}$ , iar tensiunea și rotirea maximă sunt:

$$\tau_{i\max} = 90,26 \text{ MPa}; \tau_{ii} = 37,61 \text{ MPa};$$

$$\theta_{\max} = 9.174 \cdot 10^{-6} \text{ rad/mm} = 0^\circ 31' 32'' / \text{m}.$$

### Problema 11

Diametrul spirei este:  $d=6,4 \text{ mm}$ , iar diametrul de înfășurare este:  $D=20,6 \text{ mm}$ .

### **Problema 12**

a).  $d_1 = 19 \text{ mm}$ ;  $\tau_{1\text{max}} = 342 \text{ MPa}$ ;  $d_2 = 24 \text{ mm}$ ;  $\tau_{2\text{max}} = 325 \text{ MPa}$ .

b).  $f = 113,2 \text{ mm}$ .

### **Problema 13**

a).  $F_{1m} = 15,860 \text{ kN}$ ;  $F_{2m} = -3,964 \text{ kN}$ ;

b).  $\varphi_{AB} = \frac{9,43}{a} \text{ rad}$ ;

c).  $F_{\text{max}} = 1,8 \text{ kN}$ .

## **Cap. 7. Încovoierea barelor drepte**

### **Problema 1**

Se adoptă profil I 10.

### **Problema 2**

Se adoptă  $p_{\text{cap}} = 215 \text{ kN/m}$ .

### **Problema 3**

Se adoptă  $t = 5 \text{ mm}$ .

### **Problema 4**

Bara rezistă:  $\sigma_{\text{max}} = \sigma_z + \sigma_y = 20,256 + 81,96 = 102,2 \text{ MPa}$

### **Problema 5**

Se adoptă  $t = 12 \text{ mm}$ .

### **Problema 6**

Se adoptă  $p = 140 \text{ kN/m}$ .

### **Problema 7**

Grinda rezistă:  $\sigma_{\text{max}} = 142,3 \text{ MPa}$

### **Problema 8**

$P_a = 12890 \text{ N}$ ;  $P_b = 7608 \text{ N}$ . Varianta a este mai eficientă ( $P_a = 1,65 P_b$ )

### **Problema 9**

$x = 0,207 \text{ l}$ ;  $\sigma_{\text{max}} = 40,05 \text{ MPa}$

**Problema 10**

$$\sigma_A = -5,535 \text{ MPa} > \sigma_B = -30,60 \text{ MPa}$$
$$\sigma_{pr9} / \sigma_{pr10} = 40,05 / 30,06 = 1,3$$

**Problema 11**

$$\sigma_{\max} = -103,69 \text{ MPa}$$

**Problema 12**

$$\sigma_{\max} = -230 \text{ MPa, st\^alpul nu rezist\^a.}$$

**Problema 13**

Se adopt\^a **b=44 mm** \^si deci **a=66 mm**.

**Problema 14**

$$P_{1\text{cap}} = 3,4 \text{ kN} \text{ \^si } P_{2\text{cap}} = 5,06 \text{ kN.}$$

**Problema 15**

Se adopt\^a **b=80 mm**.

**Problema 16**

Se adopt\^a **a=420 mm**, deci lungimea total\^a a grinzii este de 2100 mm.

**Problema 17**

Se adopt\^a **L=460 mm**.

**Problema 18**

Se adopt\^a **p<sub>cap</sub>=0,96 kN/m**.

**Problema 19**

Se adopt\^a **d =12 mm**.

**Problema 20**

$$(1-2) l_{CS} = 402 \text{ mm} > l_S = 416 \text{ mm} > (2-3) l_{CS} = 102 \text{ mm} > l_S = 116 \text{ mm.}$$

**Problema 21**

$$\sigma_{efs} = 140,62 \text{ MPa}; \tau_{ef} = 33,48 \text{ MPa.}$$

**Problema 22**

$$\sigma_s = 140,62 \text{ MPa}; \tau_f = 33,48 \text{ MPa.}$$

### Problema 23

a)  $\sigma=75$  MPa;  $\tau=43,3$  MPa;

b)  $\sigma=\tau=50$  MPa;

c)  $\sigma=25$  MPa;  $\tau=43,3$  MPa;

Soluția cea mai eficientă este **varianta b**, deoarece lungimea cordonului de sudură este mai mică decât la varianta c.

### Problema 24

Se adoptă  $M_t=67,83$  Nm.

### Problema 25

Se adoptă  $M_t=246,2$  Nm.

### Problema 26

Se adoptă  $F=1210$  kN.

## Cap. 8. Solicități compuse

### Problema 1

Se adoptă  $D=65$  mm și  $d=52$  mm.

### Problema 2

Se adoptă  $d=70$  mm.

### Problema 3

Se adoptă  $D=125$  mm și  $d=100$  mm.

### Problema 4

a)  $\sigma_{ech.max} = 55,55$  MPa; deci **bara rezistă**.

b)  $\sigma_{ech.max} = 39,5$  MPa; deci **bara rezistă**.

### Problema 5

$\sigma_{ech.max} = 187,1$  MPa;  $P_{cap} = 22$  kN. Datorită faptului că **bara nu rezistă** se calculează sarcina capabilă.

### Problema 6

$\sigma_{ech.max} = 111,1$  MPa; deci **bara rezistă**.

### Problema 7

$\sigma_{ech.max} = 5,36 MPa$ ; Cuțitul de strung **rezistă** (rigiditate mare).

### Problema 8

$\sigma_{ech.max} = 905,4 MPa$ ; Arborele **nu rezistă**, motiv pentru care se calc și adoptă sarcina capabilă  $M_{icap}=0,3 kNm$ .

### Problema 8

Se adoptă  $M_i = 4 kNm$ ;  $M_r = 8 kNm$ .

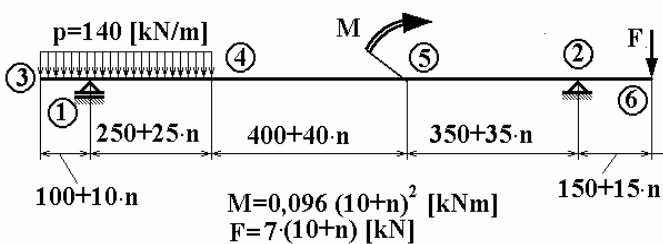


# A - Test pentru verificarea cunoștințelor la disciplina Rezistența materialelor

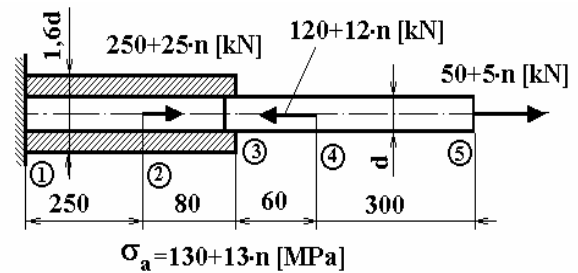
**n = .....**

1. Care este convenția de semne pentru eforturile secționale?
2. Care sunt criteriile utilizate pentru clasificarea elementelor de rezistență?
3. Care sunt unitățile de măsură pentru următoarele mărimi geometrice:
  - a. momente statice;
  - b. momente de inerție;
  - c. raze de inerție;
  - d. arie;
  - e. module de rezistență.
4. La ce solicitări este supusă spira unui arc?
5. Ce teorii (ipoteze de rupere) de rezistență cunoașteți?

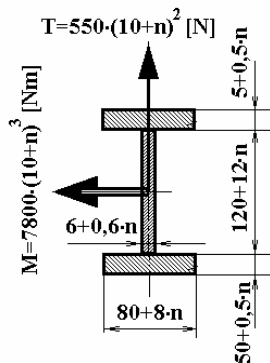
6. Să se traseze diagramele de eforturi și să se precizeze secțiunea periculoasă pentru bara din figura de mai jos.



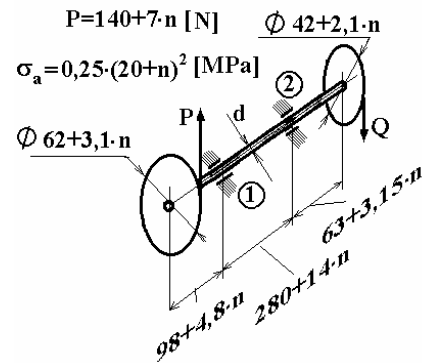
7. Să se dimensioneze bara din figura de mai jos și să se calculeze deplasarea punctului 5.



8. Să se verifice secțiunea din figură știind că  $\sigma_a = 110$  [MPa].



9. Să se dimensioneze arborele din figura de mai jos.

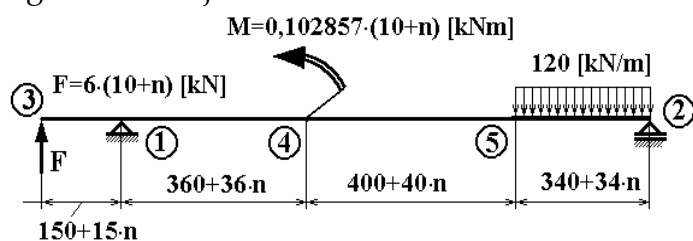


## B - Test pentru verificarea cunoștințelor la disciplina Rezistența materialelor

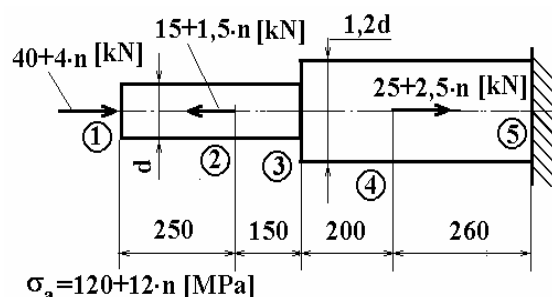
**n = .....**

1. Care sunt unitățile de măsură pentru următoarele mărimi:
  - a. forță concentrat aplicată;
  - b. sarcină distribuită;
  - c. moment concentrat aplicat;
  - d. moment distribuit;
  - e. sarcină distribuită pe o lungime;
  - f. sarcină distribuită pe o suprafață.
2. Ce sunt barele? Dar firele? Care este deosebirea dintre bară și fir?
3. Scrieți relațiile lui Steiner.
4. Ce stare de tensiune se dezvoltă într-un punct de pe suprafața exterioară a unei bare sollicitată la torsiune?
5. Care sunt etapele de calcul la dimensionarea arborilor drepecți supuși la încovoiere și torsiune?

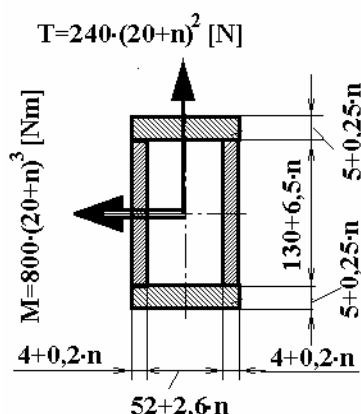
6. Să se traseze diagramele de eforturi și să se precizeze secțiunea periculoasă pentru bara din figura de mai jos.



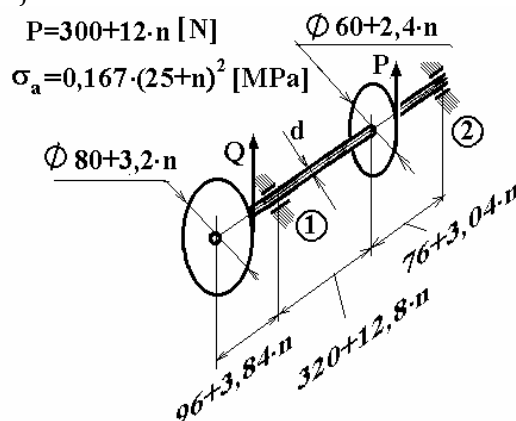
7. Să se dimensioneze bara din figura de mai jos și să se calculeze deplasarea punctului 5.



8. Să se verifice secțiunea din figură știind că  $\sigma_a = 130$  [MPa].



9. Să se dimensioneze arborele din figura de mai jos.



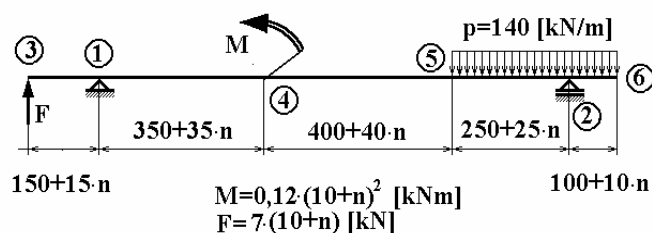


## C - Test pentru verificarea cunoștințelor la disciplina Rezistența materialelor

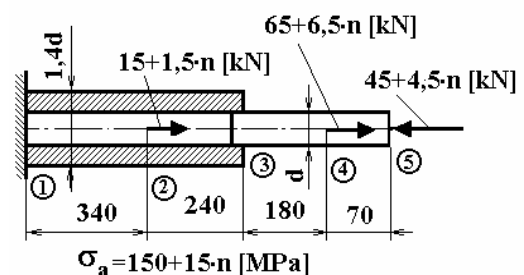
**n = .....**

1. Ce este deformația specifică?
2. Ce probleme rezolvă rezistența materialelor?
3. Ce este rezistența admisibilă? Dar coeficientul de siguranță? Ce factori influențează aceste mărimi?
4. Ce tensiuni apar pe secțiunea unei bare supusă la tracțiune? Cum sunt ele repartizate?
5. Trasați diagrama de variație a tensiunilor  $\sigma$  pe înălțimea unei grinzi supusă la încovoiere plană pură.

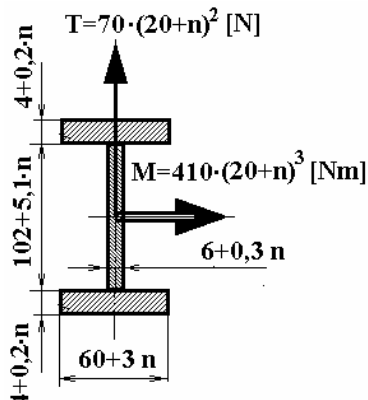
6. Să se traseze diagramele de eforturi și să se precizeze secțiunea periculoasă pentru bara din figura de mai jos.



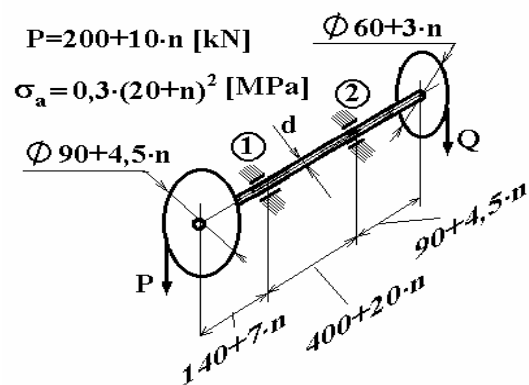
7. Să se dimensioneze bara din figura de mai jos și să se calculeze deplasarea punctului 5.



8. Să se verifice secțiunea din figură știind că  $\sigma_a = 150$  [MPa].



9. Să se dimensioneze arborele din figura de mai jos.

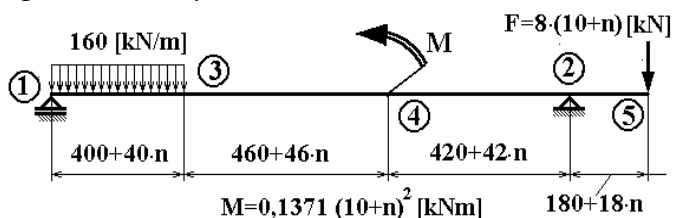


## D - Test pentru verificarea cunoștințelor la disciplina Rezistența materialelor

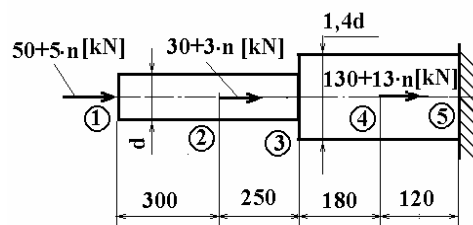
**n = .....**

1. Care este unitatea de măsură pentru tensiune?
2. Ce este tensiunea? Ce reprezintă mărimile  $\sigma$  și  $\tau$ ?
3. Ce înțelegeți prin secțiune periculoasă?
4. Scrieți și explicați relația lui Navier.
5. Definiți solicitarea compusă.

6. Să se traseze diagramele de eforturi și să se precizeze secțiunea periculoasă pentru bara din figura de mai jos.

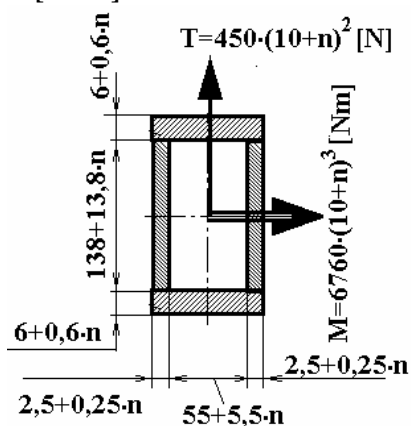


7. Să se dimensioneze bara din figura de mai jos și să se calculeze deplasarea punctului 5.

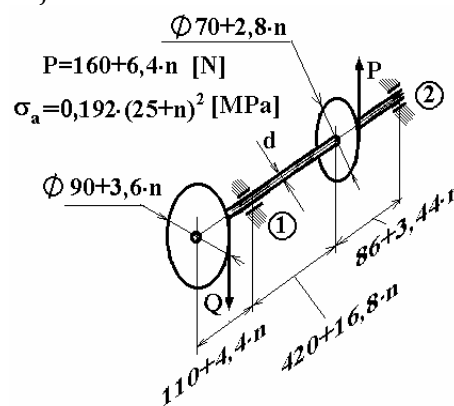


$$\sigma_a = 150 + 15 \cdot n \text{ [MPa]}$$

8. Să se verifice secțiunea din figură știind că  $\sigma_a = 95$  [MPa].



9. Să se dimensioneze arborele din figura de mai jos.



## BIBLIOGRAFIE

1. Atanasiu C., Canta T., ș.a., *Încercarea metalelor* Ed. Tehnică, București, 1982.
2. Avril, J., *Encyclopedie Vishay d'Analyse des Contraintes, Vishay-Microme-surements*, Paris, 1974.
3. Babeu T., *Rezistența materialelor*, Institutul Politehnic Traian Vuia Timișoara, 1980.
4. Bausic, V. ș.a., *Rezistența materialelor*, vol.II, Inst. Politehnic Iași, 1978.
5. Bia, C., ș.a. *Rezistența materialelor și teoria elasticității*, Ed. Didact. și Ped. București, 1983.
6. Blumenfeld, M., *Calculul barelor cu calculatoare numerice*, Ed. Tehnică, București, 1975.
7. Boleanțu, L., ș.a., *Aplicații ale solidului deformabil în construcția de mașini*, Ed. Facla, Timișoara, 1978.
8. Buga M., Iliescu N., Atanasiu C., Tudose I., *Probleme alese din rezistența materialelor*, Tipografia Universității Politehnica București, 1995.
9. Buzdugan, Gh. *Rezistența materialelor*, Ed. Academiei, București, 1986.
10. Buzdugan, Gh., ș.a. *Rezistența materialelor. Culegere de probleme*, Ed. Academiei, București, 1991.
11. Cioclov D., *Mecanica ruperii materialelor*, Ed. Academiei, București, 1977.
12. Courbon, J, *Resistance des materiaux*, vol. I și II, Dunod, Paris, 1965.
13. Curtu I. Sperchez F., *Rezistența materialelor*, vol. I,II Tipografia Universității Brașov, 1988.
14. Curtu, I., ș.a., *Mecanica lemnului și materialelor pe bază de lemn*, Ed. Tehnică, București, 1984.
15. Deutsch, I., *Rezistența materialelor*, Ed. Didact. și Ped. București, 1984.
16. Deutsch, I., ș.a. *Probleme de rezistența materialelor*, Ed. Didact. și Ped. București, 1979.
17. Felicia Doina Ciomocoș, Teodor Ciomocoș, *Teoria elasticității în probleme și aplicații*, Editura Facla, 1984.
18. Feodoseev, V.I., *Izbranie zadaci i c vapros po soprotivleniu materialov*, Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1973.
19. Feodoseev, V.I., *Résistance des matériaux*, Edition Mir, Moskva, 1975.
20. Filonenko Borodici, *Curs de rezistența materialelor*, vol I și II, Ed. Tehnică, București, 1951, 1952.

21. Goia I., *Rezistența materialelor, vol., I II*, Tipografia Universității Brașov, 1981.
22. Hütte, *Manualul inginerului -Fundamente*, Editura Tehnică, București 1997.
23. Hărdău M., *Aplicarea metodei elementului finit la calculul de rezistență în construcția de mașini*, Universitatea Tehnică Cluj-Napoca, 1992.
24. Ille, V. ș.a., *Rezistența materialelor*, Inst. Politehnic, Cluj- Napoca, 1980.
25. Massonnet, Ch., *Résistance des matériaux, vol. I și II*, Dunod, Paris, 1968.
26. Mazilu, P. ș. a. *Probleme de rezistența materialelor, vol. I, II*, Ed. Tehnică. București, 1969, 1975.
27. Mazilu, P., *Rezistența materialelor*, Inst. de Construcții, București, 1974.
28. Mocanu, D,R., *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică, București, 1980.
29. Mocanu, D.R. ș.a., *Analiza experimentală a tensiunilor, vol. I, II*, Ed. Tehnică, București, 1976, 1977.
30. Modiga, M., *Rezistența materialelor*, I.I.S. Galați, 1986.
31. Munteanu M., Radu N., Popa A., *Rezistența materialelor, vol. I,II* Tipografia Universității Brașov, 1989.
32. Petre, A. ș. a., *Bare cu pereți subțiri*, Ed. Tehnică, București, 1960.
33. Petre, A. *Calculul structurilor de aviație*, Ed. Tehnică, București, 1984.
34. Ponomariov, S.D. ș.a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. I, II și III, Ed. Tehnică, București, 1960, 1963, 1964.
35. Posea, N., *Rezistența materialelor*, Ed. Did. și Ped., București, 1979.
36. Posea, N., *Rezistența materialelor*, Probleme, Ed. Științ. și Enciclopedică, București, 1986.
37. Păstrav, I., *Rezistența materialelor*, Inst. Politehnic, Cluj- Napoca, 1979.
38. Radu N. Gheorghe, Munteanu M, Biț C, *Rezistența materialelor și elemente de teoria elasticității* Vol. I 1995, Vol. II 1996, vol.III 1998, Ed. Macarie Tîrgoviște.
39. Sofonea G., Frațilă M., *Rezistența materialelor*, U. "L. Blaga" Sibiu, 1998, ISBN 973-9280-97-8
40. Sofonea G., Frațilă M. Vasiloiaca C-tin. *Culegere de probleme de Rezistența materialelor*, U. "L. Blaga" Sibiu, 1995.
41. Sofonea G. Ș.a. *Îndrumar de lucrări de laborator*, U. "L. Blaga" Sibiu, 2001.
42. Solomon L., *Elasticitate liniară*, Editura Academiei București, 1969.
43. Teodorescu, P.P., *Teoria elasticității și introducerea în mecanica solidului deformabil*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca,1976.
44. Timoshenko,S.P., *Résistance des matériaux*, Vol. I și II, 1986.
45. Tudose I., Atanasiu C., Iliescu N. *Rezistența materialelor* Ed. Didact. și Ped. București, 1981.
46. Voinea, R. ș.a. *Mecanica solidului cu aplicații în inginerie* Ed. Academiei 1989.